

**UNIVERSIDADE METODISTA DE PIRACICABA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA E DE PRODUÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE  
PRODUÇÃO**

**As incertezas das medições: pontos críticos e  
simplificações para a metrologia dimensional na indústria**

**Eng.º Luís Gonzaga de Lima**  
Orientador: Prof. Dr. Alvaro J. Abackerli

Santa Bárbara d'Oeste  
1999

**UNIVERSIDADE METODISTA DE PIRACICABA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA E DE PRODUÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE  
PRODUÇÃO**

**As incertezas das medições: pontos críticos e  
simplificações para a metrologia dimensional na indústria**

**Eng.º Luís Gonzaga de Lima**  
Orientador: Prof. Dr. Alvaro J. Abackerli

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Engenharia de Produção, da Faculdade de Engenharia Mecânica e de Produção, da Universidade Metodista de Piracicaba – UNIMEP, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Produção.

Santa Bárbara d'Oeste  
1999

# **As incertezas das medições: pontos críticos e simplificações para a metrologia dimensional na indústria**

**Eng.º Luís Gonzaga de Lima**

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada, em 28 de setembro de 1999, pela Banca Examinadora constituída pelos Professores:

Prof. Dr. Alvaro J. Abackerli, Presidente  
UNIMEP

Prof. Dra. Léa Contier de Freitas  
INMETRO

Prof. Dr. Gilberto Martins  
UNIMEP

À minha esposa Sandra por ter me dado todo apoio necessário para a realização desse trabalho e ao meu filho Matheus por me dar a imensa alegria de realizar o desejo de ser pai.

Aos meus pais por tudo que sou.

“A riqueza de um homem está em seu caráter e sua humildade”.

## AGRADECIMENTOS

Uma dissertação de mestrado exige um longo tempo de trabalho e dedicação pessoal, às vezes, nos impedindo de realizar nossas tarefas mais corriqueiras, causando assim alguns transtornos às pessoas que mais amamos. Por isso, agradeço a todos que colaboraram na realização deste trabalho e em especial:

- A minha esposa, pelo amor, paciência e incentivo permanente;
- A toda minha família;
- Ao meu orientador, Prof. Dr. Alvaro J. Abackerli pela sua imprescindível orientação, pelo crédito, paciência, sabedoria, sem a qual não teria sido possível a conclusão deste trabalho;
- Ao analista da qualidade, José Francisco Feliciano , pela colaboração na calibração de micrômetros externos e fornecimento de dados para o cálculo de incerteza;
- Ao Gerente Técnico do Laroylab (Starrett), Sérgio Eduardo Cristofolletti, pela colaboração no fornecimento de dados para o cálculo de incerteza do bloco-padrão;
- A Indústrias Romi S/A pela bolsa de mestrado e utilização de alguns equipamentos;
- A todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho. Dentre eles quero agradecer aos colegas do departamento de Garantia da Qualidade das Indústrias Romi S/A.
- A Deus, pela coragem e determinação que me destes.

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	IX
LISTA DE TABELAS	X
LISTA DE SIGLAS	XI
GLOSSÁRIO	XII
RESUMO	XV
ABSTRACT	XVI
Capítulo 1 - INTRODUÇÃO	1
Capítulo 2 - A EVOLUÇÃO E OS DOCUMENTOS SOBRE A INCERTEZA DE MEDIÇÃO	5
2.1 - Análise Comparativa dos Principais Documentos Recentes Sobre Incerteza de Medição	11
Capítulo 3 - O TRATAMENTO DAS INCERTEZAS DE MEDIÇÃO	15
3.1 - Conceitos Básicos da Estatística	16
3.2 - Especificação da Incerteza	23
3.2.1 - Fontes de Incerteza	24
3.2.2 - Incerteza Padrão Tipo A e Tipo B	25
3.3 - Avaliação e Expressão da Incerteza	34
3.3.1 - Modelamento da Medição	35
3.3.2 - Determinação da Incerteza Padrão $u(y)$	36
3.3.3 - Determinação da Incerteza Combinada ( $u_c$ )	37
3.3.4 - Incerteza Expandida	39
3.3.5 - Fator de Abrangência e Graus de Liberdade	40
3.3.6 - Apresentação dos Resultados	42
3.3.7 - Uso de Algarismos Significativos	45
Capítulo 4 - TRABALHO PROPOSTO	47
Capítulo 5 - DESENVOLVIMENTO DOS CONCEITOS RELATIVOS A INCERTEZA	49
5.1 - As Incertezas Tipo A e B e os Erros Aleatórios e Sistemáticos	50
5.2 - Determinação das Médias e Variâncias para as Principais Distribuições do Tratamento das Incertezas	53
5.3 - Os Coeficientes de Sensibilidade da Expressão da Incerteza Padrão Combinada	60
5.4 - A Propagação de Incertezas Originadas de Diferentes Modelos de Probabilidade	63
5.5 - Grandezas Correlacionadas e Não Correlacionadas	65

5.6 - Procedimento Simplificado de Cálculo de Incerteza de Medição para Metrologia Dimensional na Indústria	68
<b>Capítulo 6 - ESTUDOS DE CASOS</b>	<b>72</b>
6.1 - Cálculo de Incerteza da Calibração de Blocos-Padrão	73
6.1.1 - Comparação dos Resultados Encontrados	88
6.2 - Cálculo de Incerteza da Calibração de Micrômetro Externo	91
6.2.1 - Comparação dos Resultados Encontrados	107
6.3 - Comprovação da Simplificação Utilizada no Procedimento Simplificado Proposto	110
<b>Capítulo 7 - CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS</b>	<b>114</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>117</b>
<b>Bibliografia Consultada</b>	<b>120</b>
<b>Anexo 1</b>	<b>128</b>
<b>Anexo 2</b>	<b>130</b>
<b>Anexo 3</b>	<b>132</b>
<b>Anexo 4</b>	<b>136</b>
<b>Anexo 5</b>	<b>142</b>
<b>Anexo 6</b>	<b>148</b>



## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 3.1</b> -Curva Normal	<b>20</b>
<b>Figura 3.2</b> -Zonas de Probabilidade da Curva Normal	<b>20</b>
<b>Figura 3.3</b> - Fontes de Incerteza - Área Dimensional	<b>24</b>
<b>Figura 3.4</b> - Distribuição Retangular	<b>30</b>
<b>Figura 3.5</b> - Distribuição Trapezoidal Simétrica	<b>32</b>
<b>Figura 3.6</b> - Distribuição Triangular	<b>33</b>
<b>Figura 5.1</b> - Interpretação Esquemática da Abordagem Ortodoxa	<b>51</b>
<b>Figura 5.2</b> - Conceitos da Distribuição Retangular	<b>54</b>
<b>Figura 5.3</b> - Conceitos da Distribuição Trapezoidal	<b>57</b>
<b>Figura 5.4</b> - Conceito da Distribuição Triangular	<b>59</b>
<b>Figura 5.5</b> - Representação Gráfica do Coeficiente de Sensibilidade	<b>60</b>
<b>Figura 6.1</b> - Diagrama Esquemático do Sistema de Calibração do Bloco-Padrão (Decker/Pekelsky, 1995)	<b>73</b>
<b>Figura 6.2</b> - Diagrama Esquemático do Sistema de Calibração do Micrômetro	<b>91</b>

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 2.1</b> - Resumo da evolução histórica da Incerteza de medição	<b>9</b>
<b>Tabela 2.2</b> - Histórico dos principais documentos sobre Incerteza de medição	<b>10</b>
<b>Tabela 2.3</b> - Comparação de alguns tratamentos utilizados nos vários documentos publicados	<b>14</b>
<b>Tabela 3.1</b> - População e amostra do mensurando de 50mm	<b>17</b>
<b>Tabela 3.2</b> - Estimadores e parâmetros populacionais Normais	<b>17</b>
<b>Tabela 3.3</b> - Valor do fator de abrangência $k$ e seu respectivo nível de confiança	<b>29</b>
<b>Tabela 3.4</b> - Valores de $\nu_{eff}$ para um nível de confiança aproximado de 95%	<b>41</b>
<b>Tabela 5.1</b> - Nível de confiança/distribuição	<b>64</b>
<b>Tabela 5.2</b> - Dados da medição hipotética da área de um retângulo	<b>67</b>
<b>Tabela 6.1</b> - Planilha de Incerteza do procedimento de cálculo conforme o Guia	<b>84</b>
<b>Tabela 6.2</b> - Planilha de Incerteza do procedimento de cálculo conforme o procedimento simplificado	<b>84</b>
<b>Tabela 6.3</b> - Comparação das expressões e valores encontrados no estudo de caso 1	<b>90</b>
<b>Tabela 6.4</b> - Resultado das medições do micrômetro	<b>92</b>
<b>Tabela 6.5</b> - Planilha de Incerteza do procedimento de cálculo conforme o Guia	<b>103</b>
<b>Tabela 6.6</b> - Planilha de Incerteza do procedimento de cálculo conforme o procedimento simplificado	<b>103</b>
<b>Tabela 6.7</b> - Comparação das expressões e valores encontrados no estudo de caso 2	<b>108</b>
<b>Tabela 6.8</b> - Comparação de resultados	<b>112</b>

## LISTA DE SIGLAS

<b>ABNT</b>	Associação Brasileira de Normas Técnicas
<b>ANSI</b>	American National Standard Institute
<b>BIPM</b>	Bureau International des Poids et Mesures
<b>BSI</b>	British Standards Institution
<b>CIPM</b>	Comité International des Poids et Mesures
<b>DIN</b>	Deutsches Institut für Normung
<b>EA</b>	European co-operation for Accreditation (substituiu o EAL)
<b>EAL</b>	European Cooperation for Accreditation of Laboratories
<b>EURACHEM</b>	European Collaboration in Analytical Chemistry
<b>GUM</b>	Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement
<b>IEC</b>	International Electrotechnical Commission
<b>IFCC</b>	International Federation of Clinical Chemistry
<b>INMETRO</b>	Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial
<b>ISO</b>	International Organization for Standardization
<b>IUPAC</b>	International Union of Pure and Applied Chemistry
<b>IUPAP</b>	International Union of Pure and Applied Physics
<b>NAMAS</b>	National Measurement Accreditation Service
<b>NIST</b>	National Institute of Standards and Technology
<b>NPL</b>	National Physical Laboratory
<b>OIML</b>	Organization International de Métrologie Légale
<b>PTB</b>	Physikalisch-Technische Bundesanstalt
<b>SI</b>	Système International d'Unités
<b>TAG</b>	Technical Advisory Group
<b>UKAS</b>	United Kingdom Accreditation Service
<b>VIM</b>	International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology
<b>WECC</b>	Western European Calibration Cooperation
<b>WG</b>	Working Group

## GLOSSÁRIO

$a$	Semi faixa ou meia largura de uma distribuição.
$a_+, a_-$	Limite superior da grandeza de entrada $x_i$ .
$b_+, b_-$	Limite superior do desvio da grandeza de entrada de sua estimativa $x_i : b_+ = x_i - a_+$ e $x_i : b_- = x_i - a_-$ .
$c_i$	Coefficiente de sensibilidade.
$y = f(x_i)$	Relação funcional entre o mensurando $y$ e as grandezas de entrada $x_i$ .
$\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}$	Derivada parcial da relação funcional $f(X)$ com respeito à grandeza de entrada $x_i$ .
$k, k_p$	Fator de abrangência.
$n$	Número de elementos de uma amostra.
$M$	Número de grandezas de entrada $X_i$ das quais depende o mensurando $Y$ .
$N$	Números de elementos de uma população.
$p$	Valor de probabilidade ( $0 \leq p \leq 1$ ).
$q$	Grandeza que varia aleatoriamente, descrita por uma distribuição de probabilidade.
$q_k$	$k$ -ésima observação repetida independente da grandeza aleatoriamente variável $q$ .
$\bar{q}$	Média aritmética de $n$ observações repetidas independentes de $q_k$ .
$r(x_i, x_j)$	Coefficiente de correlação estimado associado às grandezas.
$r(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$	Coefficiente de correlação estimado das médias de entrada $\bar{x}_i$ e $\bar{x}_j$ .
$r(y_i, y_j)$	Coefficiente de correlação estimado associado as estimativas de saída $y_i$ e $y_j$ .

$s^2(\bar{q})$	Variância experimental da média $\bar{q}$ .
$s(\bar{q})$	Desvio padrão experimental da média $\bar{q}$ .
$s^2(q_k)$	Variância experimental determinada por $n$ observações repetidas independentes $q_k$ .
$s^2(\bar{x}_i)$	Variância experimental da média de entrada $\bar{x}_i$ .
$s(\bar{x}_i)$	Desvio padrão experimental da média de entrada $\bar{x}_i$ . <sup>a</sup>
$s(\bar{q}, \bar{r})$	Estimativa da covariância das médias $\bar{q}$ e $\bar{r}$ .
$s(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$	Estimativa da covariância das médias de entrada, $\bar{x}_i$ e $\bar{x}_j$ .
$t_p(\nu), t_p(\nu_{eff})$	Fator-t da distribuição t-student para $\nu$ graus de liberdade.
$u^2(x_i)$	Variância estimada associada à estimativa de entrada $x_i$ .
$u(x_i)$	Incerteza padrão da estimativa de entrada $x_i$ .
$u(x_i, x_j)$	Covariância estimada associada a duas estimativas de entrada $x_i$ e $x_j$ .
$u_c^2(y)$	Variância combinada associada à estimativa da saída $y$ .
$u_c(y)$	Incerteza padrão combinada da estimativa da saída $y$ .
$U, U_p$	Incerteza expandida da estimativa de saída $y$ .
$x_i$	Estimativa da grandeza de entrada $X$ .
$x_{i,k}$	$k$ -ésima observação repetida independente de $x$ .
$y$	Estimativa do mensurando $Y$ .
$\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}$	Incerteza relativa estimada da incerteza padrão $u(x_i)$ da estimativa de entrada $x_i$ .
$\nu, \nu_i$	Graus de liberdade, ou graus de liberdade efetivos, da incerteza padrão $u(x_i)$ da estimativa de entrada $x_i$ .

- $\nu_{eff}$  Graus de liberdade efetivos de  $\mathbf{u}_c(\mathbf{y})$ .
- $\sigma^2, \sigma^2(\bar{\mathbf{q}})$  Variância de uma distribuição de probabilidades e de  $\bar{\mathbf{q}}$ .
- $\sigma, \sigma(\bar{\mathbf{q}})$  Desvio padrão de uma distribuição de probabilidades e de  $\bar{\mathbf{q}}$ .

LIMA, Luís Gonzaga. **As incertezas das medições: pontos críticos e simplificações para a metrologia dimensional**. Santa Bárbara d'Oeste: FEMP, UNIMEP, 1999. 178 p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Mecânica e de Produção, Universidade Metodista de Piracicaba, 1999.

## **RESUMO:**

Os erros e as incertezas das medições têm sido objeto de interesse da comunidade científica durante todo este século, culminando na sua necessidade para as atividades diárias da indústria na virada do novo milênio. Para atender a esta necessidade, inúmeras organizações internacionais criaram diretrizes para orientar o tratamento da incerteza nos diferentes ramos da ciência e da tecnologia. Entretanto, pela complexidade inerente à discussão das incertezas, algumas vezes seus conceitos não são claros, nem tampouco as condições de contorno necessárias para a abordagem correta de alguns problemas. Esse é o caso típico das aplicações industriais nas quais as condições ideais estabelecidas pelas normas, além da fundamentação teórica de vários conceitos, não podem ser garantidas na sua totalidade. Para auxiliar o melhor entendimento da expressão das incertezas, neste trabalho alguns de seus conceitos são apresentados, buscando-se esclarecimentos particularizados que facilitem sua aplicação em algumas atividades industriais. Um procedimento simplificado para cálculo da incerteza em problemas da metrologia industrial mecânica também é proposto, buscando-se soluções mais simples que sejam orientadas pelos documentos normativos e não impliquem em perdas de qualidade dos resultados. No procedimento proposto as etapas são desenvolvidas passo a passo, de modo a permitir seu uso imediato por pessoal técnico da indústria, apresentando-se ainda alguns estudos de caso que permitem verificar sua adequação ao Guia para a Expressão da Incerteza de Medição (ABNT/INMETRO,1998).

**PALAVRAS-CHAVE:** Incerteza, Calibração, Medição, Metrologia

LIMA, Luís Gonzaga. **As incertezas das medições: pontos críticos e simplificações para a metrologia dimensional**. Santa Bárbara d'Oeste: FEMP, UNIMEP, 1999. 178 p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Mecânica e de Produção, Universidade Metodista de Piracicaba, 1999.

## **ABSTRACT**

The discussion of uncertainty and errors on measurement have taken the attention of the scientific community all way through this century, turning into a basic need for industrial activities for the new millennium. As an answer to this basic need, international organizations have published documents and standards to guide the user through the expression of uncertainty in different areas of science and technology. However, the natural complexity of uncertainty expression makes things difficult in industrial applications where some basic concepts are not clear, or even the theoretical constraints can not be fully maintained. To help its better understanding, some important concepts and their practical implications are presented in this work. Additionally, a simplified procedure for the uncertainty evaluation in dimensional metrology is presented, to help industrial technicians to widen their knowledge and spread the evaluation of uncertainties in daily activities . It is important to point out that, despite its reduced form, the proposal has full conceptual compliance to national and international standards, particularly with the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (ISO, 1995). Moreover, the proposed step by step procedure is followed by case studies in which one can note that no lost of quality in results is obtained due to the proposed simplifications.

**KEYWORDS:** Uncertainty, Calibration, Measurement, Metrology.



# Capítulo 1

## 1 - INTRODUÇÃO

Nos últimos anos o ambiente dos processos da manufatura mundial vem sofrendo modificações radicais. O crescimento tecnológico acelerado vem elevando consideravelmente a diversificação dos itens produzidos pelas indústrias de manufatura, com especial enfoque no ramo metal-mecânico. Para melhorar a qualidade e/ou reduzir custos, na tentativa de se buscar novos mercados ou se manter os já conquistados, frente a uma concorrência cada vez mais acirrada, os administradores das empresas são levados a repensar suas organizações, buscando aperfeiçoamento, eficiência e racionalização da produção de forma a alcançar um ambiente de manufatura de classe mundial (Agostinho, 1991).

Para alcançar um ambiente de manufatura de classe mundial, que tem como objetivo dar 100% de satisfação ao cliente, é de vital importância que as empresas se organizem de forma a enfocarem a melhoria contínua da qualidade do produto para que a meta do "zero defeitos" seja atingida.

Para atingir tal meta, as empresas têm a necessidade de conhecer o seu processo produtivo e o seu produto, e isto só é possível através da realização de medições para verificar se os produtos estão compatíveis com as tolerâncias de fabricação.

As medições são necessárias em praticamente todas as fases dos processos produtivos, desde o recebimento dos insumos até a entrega dos produtos, passando pelo controle de processo de fabricação e pela realização dos ensaios necessários para confirmar que as especificações foram atingidas, assegurando assim a adequação final do produto ao seu uso previsto.

Como a montagem de um mecanismo complexo se faz a partir de um conjunto de peças e partes intercambiáveis, nominalmente idênticas, é evidente a

necessidade de procedimentos uniformes de medição através dos quais sejam comparáveis, independentemente dos lugares onde os mesmos tenham sido produzidos.

A necessidade de procedimentos uniformes de medição leva as empresas a se estruturarem de forma que tenham atividades planejadas e sistematizadas, implementadas em seu sistema da qualidade.

O conjunto dessas atividades é conhecido como Garantia da Qualidade (ABNT, 1994). Ela é imprescindível no contexto atual do comércio internacional para que as empresas melhorem seus produtos, não sendo possível consegui-la sem que as empresas tenham um adequado controle metrológico de todos os instrumentos, padrões e acessórios de medição utilizados para verificar a conformidade de seus produtos. O controle metrológico como elemento da garantia da qualidade está previsto nas normas da série ISO 9000 (ABNT, 1994) e na norma ISO 10012-1 (ABNT, 1993) dentre outras.

Na norma ISO 9001 (ABNT, 1994), o requisito 4.11, cujo título é “Controle de equipamentos de inspeção, medição e ensaios”, inclui várias considerações relativas aos aspectos metrológicos de uma empresa, trazendo como ênfase o fato de que todos os equipamentos importantes para a qualidade devam ser periodicamente calibrados, dentro de um adequado sistema de comprovação metrológica, e que a incerteza de medição deva ser conhecida, além de razoavelmente menor que as tolerâncias a verificar.

Já na norma ISO 10012-1 (ABNT, 1993) é destacada a importância da comprovação metrológica, especificando as principais características de um sistema de comprovação metrológica e apresentando requisitos e orientações para implementar e assegurar que medições sejam realizadas com a exatidão pretendida. Comprovação metrológica é o conjunto de operações necessárias para se assegurar que um dado equipamento de medição esteja em condições de conformidade segundo os requisitos de sua utilização (ABNT, 1993).

Na comprovação metrológica estão inclusos dois elementos centrais; a necessidade que todos os equipamentos mantenham rastreabilidade a padrões nacionais ou internacionais, através de calibrações periódicas de todos os elementos que formam a cadeia metrológica, e que se possa estabelecer a incerteza associada aos resultados das medições efetuadas com esses equipamentos. Ambos os elementos estão estreitamente ligados, não sendo possível a garantia de um sem o outro. A rastreabilidade da calibração de equipamentos é a recuperação do

histórico que relaciona o equipamento de medição que será calibrado aos padrões nacionais ou internacionais utilizados na sua calibração (ABNT, 1994), e a incerteza de medição é a indicação quantitativa da qualidade do equipamento (Mathiessen, 1997).

Com base em tais argumentos é fácil concluir que o cálculo da incerteza é muito importante nas calibrações de equipamentos de medição, pois através dele se tem condições de avaliar a capacidade de medição e saber sobre sua adequação à medição a qual se destina.

Se um determinado instrumento de medição tem seu valor de incerteza próximo ao valor da tolerância da característica a ser medida, o equipamento não deve ser usado pois sua incerteza afetará a conclusão sobre a aceitação do produto, ou seja, a incerteza do equipamento calibrado deve ser razoavelmente menor que a tolerância a ser verificada.

Embora importante na prática diária, muitas empresas não usam adequadamente a incerteza de medição na avaliação da capacidade de seus instrumentos. Muitas ainda avaliam esta capacidade apenas pela comparação da resolução (INMETRO, 1995) dos instrumentos com a amplitude do campo de tolerância da característica a medir. Nestas circunstâncias não é considerada a influência de importantes fatores tais como operador, condições ambientais (temperatura), deformações, erros geométricos, etc. Logicamente, isto proporciona um entendimento muito restrito sobre a capacidade real de medição dos instrumentos, criando sérios problemas na avaliação dos processos de manufatura onde estes instrumentos são aplicados.

Esse fato é motivado, em um grande número de casos, pela falta de entendimento sobre o cálculo das incertezas de medição por parte dos profissionais ligados a metrologia que trabalham no setor industrial. Essa falta de entendimento, por sua vez, é devida em parte pela baixa formação técnica dos profissionais da metrologia, além da complexidade típica dos documentos sobre expressão de incerteza. Esses são de difícil leitura e compreensão, pois apresentam conceitos que não são elementares e não estão explicados com detalhes suficientes para o uso cotidiano.

Face a tais circunstâncias, o presente trabalho propõe discutir e esclarecer alguns aspectos relacionados à expressão da incerteza de medição, segundo os principais documentos sobre o tema, propondo um procedimento simplificado para o cálculo da incerteza de equipamentos de medição utilizados em metrologia

dimensional na indústria. Ênfase especial será dada às aplicações na indústria, uma vez que em ambientes laboratoriais as dificuldades que motivam a discussão trazida nesse trabalho devem ser superadas sob outras condições de contorno para garantir igualmente a rastreabilidade das calibrações aos padrões nacionais e internacionais. Já na indústria, inúmeras condições adversas interferem nos processos, tirando-as das condições ótimas estabelecidas para as calibrações e medições. Justifica-se assim procedimentos simplificados que ponderem adequadamente os detalhes exigidos pelas normas, frente às condições reais de utilização da incerteza na indústria.

Para apresentar essa discussão, o trabalho está dividido em 7 capítulos, organizados da seguinte forma.

No Capítulo 2 é apresentada a discussão da evolução do tratamento das incertezas, através da apresentação de um breve histórico e da análise descritiva da incerteza.

No Capítulo 3 é apresentado o tratamento convencional de incerteza segundo os principais documentos que discutem o tema na atualidade.

No Capítulo 4 é apresentada a proposta de trabalho.

No Capítulo 5 é feita a análise das dificuldades do tratamento da incerteza e a discussão de alguns dos seus aspectos mais relevantes.

No Capítulo 6 são apresentados dois estudos de casos através dos quais a abordagem simplificada e seus resultados serão apresentados.

No Capítulo 7 são apresentadas as conclusões relativas ao desenvolvimento deste trabalho, além de algumas propostas para desenvolvimento de trabalhos futuros.

## Capítulo 2

### 2 - A EVOLUÇÃO E OS DOCUMENTOS SOBRE A INCERTEZA DE MEDIÇÃO

A incerteza de medição é atualmente calculada de uma forma padronizada pela grande maioria de seus usuários. Entretanto, essa forma de cálculo começou a ser utilizada somente nos últimos anos, principalmente a partir de 1993.

O tratamento do que hoje se convencionou chamar de expressão da incerteza de medição tem origem indefinida. É provável que ela tenha começado no início do século XIX com Gauss, Laplace e Bessel, que trabalharam na redação e aperfeiçoamento do método a partir do qual tornou-se possível definir a distribuição dos erros em variáveis medidas. A história indica que a análise das distribuições dos erros foi tratada inicialmente com o uso de distribuições de probabilidade, a partir das quais se começou a trabalhar com o valor mais provável de uma grandeza medida, e disso com suas incertezas.

Toda essa discussão envolvendo probabilidades de erros em variáveis ficou convencionalmente conhecida como teoria de erros, estando presente principalmente nas ciências físicas. Dentre os espaços nos quais essa discussão se tornou presente podem ser citados; as medições da física básica para trabalhos laboratoriais, a manutenção de padrões e a medição de grandezas físicas para comprovação de leis físicas.

Convencionalmente a teoria de erros interpreta a incerteza no papel do erro absoluto ou relativo, proveniente da análise dos erros aleatórios de um experimento. Nesta teoria os erros são classificados em aleatórios e sistemáticos com base na forma pela qual os mesmos se manifestam nos resultados das medições (Vuolo, 1996).

Pela sua natureza aleatória, como enuncia o próprio nome, os erros aleatórios podem ser representados por modelos estatísticos, sendo portanto possível a realização de inferências estatísticas sobre o valor dos parâmetros dessas distribuições. Portanto, pela inferência sobre os parâmetros, determina-se o valor da medida. Por exemplo, num conjunto de medições é calculada a média amostral como melhor estimador do valor provável dessa medição. Nisto está implícito uma distribuição de probabilidades, talvez normal, sendo a média tomada como o valor mais representativo da medição.

Os erros sistemáticos, por sua vez, raramente são utilizados no tratamento da incerteza. Nessa teoria, a natureza sistemática destes erros determina geralmente correções a serem aplicadas aos resultados de modo a torna-los mais próximos do valor correto. Uma vez feitas as correções uma parcela sistemática ainda permanece nos resultados, sendo ela englobada na ponderação geral dos resultados da medição.

Essa concepção de tratamento de incertezas é a mais difundida nos meios acadêmicos e é conhecida como "teoria" ortodoxa de erros conforme discussão feita por Colclough (1987). Dentre suas várias regras, pode ser destacado o entendimento que a incerteza de um resultado experimental deve ser separada em duas categorias: a primeira, denominada Incerteza aleatória, que pode ser avaliada por métodos estatísticos; a segunda, denominada incerteza sistemática, que pode ser avaliada por outros métodos.

Nesta concepção uma outra regra estabelece que as incertezas sistemáticas e aleatórias devem ser mantidas separadas em todos os cálculos, devendo a combinação de ambas ser evitada. Quando combinadas, os limites de erro são geralmente grandes, sendo por isso mais aceita entre pesquisadores que trabalham em laboratórios de calibração de padrões.

Uma outra concepção da teoria de erros, identificada para tratar as incertezas experimentais, é a "teoria" aleatória que dispensa a distinção entre erros sistemáticos e erros aleatórios, tratando-os como se fossem todos aleatórios. Diferentemente da teoria ortodoxa, a teoria aleatória, além de tratar os erros como se fossem todos aleatórios, permite a combinação dos mesmos sendo esta a grande distinção entre esta teoria e a ortodoxa.

A concepção aleatória é baseada no fato da incerteza de um resultado experimental ser composta de várias parcelas, que podem ser agrupadas em duas categorias: uma avaliada por métodos estatísticos, chamada de incerteza tipo A, e

outra avaliada por outros métodos que não os estatísticos, chamada de incerteza tipo B. Ambas caracterizadas por variâncias e por aproximações destas. Suas regras são preferidas pelos físicos experimentais pois ela usualmente gera valores mais coerentes para o limite de erro, tipicamente menores, se comparada com a teoria ortodoxa.

Com a evolução da tecnologia a discussão sobre incerteza começou a ficar importante para medições mais cotidianas, presentes no dia-a-dia de várias indústrias, e com isso as normas dos sistemas da qualidade começaram a apresentar indicativos sobre a necessidade do tratamento dessas incertezas. Neste cenário como não havia um consenso sobre a melhor maneira de calcular a incerteza, visto que as duas abordagens tem seus usuários preferenciais, e que existem divergências tanto na nomenclatura quanto nos conceitos básicos relativos a incerteza de medição, refletindo um desacordo entre pesquisadores e físicos experimentais sobre a melhor maneira de calcular a incerteza, iniciou-se uma discussão mais abrangente sobre a declaração das incertezas das medições buscando-se formas objetivas de introduzir o cálculo das incertezas das medições dentro das normas da qualidade.

Nesse cenário, em 1977 o CIPM (Comité International des Poids e Mesures) preocupado com a falta de uniformidade na expressão das incertezas, inclusive nas recomendações que diversas organizações estavam elaborando sobre o assunto, solicitou ao BIPM (Bureau International des Poids et Mesures) que estudasse a questão e procurasse chegar a uma recomendação que fosse de consenso. Mediante tal solicitação o BIPM enviou um questionário a 31 laboratórios de metrologia nacionais e a especialistas individuais, como também a cinco organizações internacionais ligadas ao assunto. Dos questionários enviados retornaram 21 com respostas que se constituíram nos dados de entrada para a realização dos estudos do BIPM.

A primeira reunião do BIPM foi realizada em 1980 com especialistas de 11 laboratórios nacionais de metrologia. Nesta reunião concluiu-se que em qualquer situação de medição poderia haver muitos componentes para a incerteza, não sendo eles de natureza diferentes mas apresentando como única distinção o seu método de avaliação. Desta forma o grupo concluiu que todos os componentes da incerteza poderiam ser caracterizados através de variâncias ou grandezas representantes das variâncias. Concluiu-se também que a incerteza poderia ser obtida aplicando-se o método habitual para combinação de variâncias. As conclusões do grupo foram

resumidas em uma recomendação denominada INC-1 publicada em 1980 e enviada ao CIPM (Giacomo, 1981).

O CIPM, por sua vez, na 70ª reunião realizada em 1981, endossou a recomendação do grupo de trabalho do BIPM e emitiu a recomendação CI-1981, onde propôs que o método descrito fosse amplamente difundido e que o BIPM se esforçasse para aplicar os princípios de cálculo para comparações internacionais. Propôs também que outras organizações fossem encorajadas a examinar e testar as propostas e apresentarem seus comentários a respeito (Giacomo, 1982).

Em 1985 o CIPM pediu para que a ISO estudasse a possibilidade de transformar detalhadamente os critérios do BIPM em um documento de aplicação, baseado nos princípios da recomendação INC-1. Para isso a ISO utilizou-se do trabalho do Grupo de Assessoria Técnica 4 da área de metrologia (TAG: Technical Advisory Group). Nele atuam especialistas do CIPM, da International Electrotechnical Commission (IEC), da International Organization of Legal Metrology (OIML), da International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC), da International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP) e da International Federation of Clinical Chemistry (IFCC).

Mediante tal solicitação, o grupo TAG 4 estabeleceu o grupo de trabalho 3 (WG), constituído por especialistas do BIPM, do IEC, da ISO e da OIML.

Em 1986, por ocasião da 75ª reunião, o CIPM reafirmou as declarações pela recomendação CI-1986 onde pediu que o método fosse empregado para todas as comparações internacionais representadas pelo BIPM (Giacomo, 1987).

Em 1993 depois de cerca de dez reuniões do grupo de trabalho da ISO, o documento ISO/TAG 4/WG 3 “Guide to the expression of uncertainty in measurement” foi publicado pela ISO em nome das sete organizações participantes. Neste momento ele começou a ser chamado de “ISO GUM”, “GUM”, “Guide”, ou “Guia” em português. Uma versão revisada do material original foi publicada em 1995.

A tabela 2.1 apresenta um resumo da evolução histórica da Expressão da Incerteza de Medição, desde o momento em que ela passou a ser estudada pelo BIPM, culminando na publicação do “ISO GUM” pela ISO. Na tabela é possível visualizar que desde a preocupação inicial do CIPM em 1977, 16 anos se passaram até a publicação em 1993 do documento ISO, hoje aceito internacionalmente. Além disso, observa-se que o estudo detalhado do documento demorou cerca de 8 anos para ser finalizado, desde 1985 até 1993, tempo suficiente para que o assunto fosse



amplamente analisado por todos os organismos responsáveis pela sua elaboração, além dos organismos consultados no processo.

Tabela 2.1. - Resumo da evolução histórica da Incerteza de Medição.

<b>ANO</b>	<b>ACONTECIMENTO</b>
<b>1977</b>	CIPM solicita ao BIPM estudar o problema de Incerteza
<b>1980</b>	1ª reunião do BIPM com a recomendação INC-1 sobre as conclusões
<b>1981</b>	O CIPM endossa a recomendação do BIPM com o documento CI-1981
<b>1985</b>	BIPM solicita a ISO que faça um documento detalhado sobre Incertezas
<b>1986</b>	O CIPM reafirma as declarações com o documento CI-1986
<b>1993</b>	A ISO publica o documento sobre incerteza ISO/TAG4/WG3 (ISO GUM)
<b>1994</b>	Outros documentos derivados do ISO GUM começam a ser editados
<b>1995</b>	A ISO corrige e reimprime o documento ISO/TAG4/WG3 (ISO GUM)

O ISO GUM tem sido, amplamente difundido e aceito pela comunidade metrológica nacional e internacional, desde sua primeira publicação em inglês em 1993. Hoje este documento se constitui num documento de consulta obrigatória para a maioria das aplicações, representando o mais completo e o mais consistente documento já produzido para estabelecer critérios e regras gerais relacionados à expressão de incertezas de medição em vários níveis de exatidão, aplicáveis a diversos campos do conhecimento, desde a pesquisa fundamental até "o chão de fábrica".

Pela sua importância, o ISO GUM foi adotado integralmente por diversos países como um documento nacional de referência. Entre tais países podemos citar a África do Sul, Alemanha, Brasil, Canadá, China, Estados Unidos, França, Inglaterra, Itália, Japão, Rússia e Singapura, dentre outros.

A partir do ISO GUM e encorajados pelo mesmo, foram publicados diversos documentos pertencentes a laboratórios nacionais e organismos de vários países com o objetivo de informar a comunidade quais eram suas políticas relativas à avaliação e expressão das incertezas. Além disso, foram produzidos diversos artigos científicos por especialistas ligados às entidades metrológicas e educacionais, com o objetivo de esclarecer pontos complicados contidos no ISO GUM.

Alguns desses documentos são relacionados na Tabela 2.2, onde são indicados sua data e país de publicação, a entidade proponente, sua identificação e o tipo do documento tratado. Pela tabela é possível verificar que o tempo gasto entre a primeira recomendação em 1980 e a elaboração de um guia detalhado em 1993 foi relativamente longo, cerca de 13 anos, mostrando também que a partir da primeira edição do ISO GUM os documentos que o sucederam foram elaborados

muito mais rapidamente. Isso demonstra que, de fato, o ISO GUM foi um documento completo e consistente sobre avaliação e expressão da incerteza de medição desde a sua elaboração, recebendo por isso um tratamento diferenciado da comunidade desde a sua origem.

Tabela 2.2 - Histórico dos principais documentos sobre Incerteza de Medição

<b>Data da Emissão</b>	<b>País</b>	<b>Entidade Emitente</b>	<b>Identificação</b>	<b>Tipo de Documento</b>
1980	França	BIPM	INC-1	Recomendação
1981	França	CIPM	CI-1981	Recomendação
1986	França	CIPM	CI-1986	Recomendação
1993/1995	Suíça	ISO	ISO TAG4 WG3 (GUM)	Guia Completo
1994	USA	NIST	NIST TN 1297	Diretrizes
1995	Inglaterra	NAMAS	NIS 3003	Diretrizes
1996	Europa	EA	EA - 4/02	Diretrizes
1996/1997	USA	ANSI	ANSI/NCSL Z540-2	Guia Completo
1997/1998	Brasil	ABNT/INMETRO	(GUIA)	Guia Completo
1999	Brasil	INMETRO	Tradução do EA 4/02	Diretrizes
1999	Helsinki	LGC	EURACHEM/CITAC (Draft)	Diretrizes

Conforme acima discutido e como mostram as referências bibliográficas deste trabalho, são muitos os documentos atuais sobre incerteza de medição.

Para uma visão mais sistematizada deste panorama, estes documentos foram analisados com base no seu conteúdo, buscando-se verificar tanto o detalhamento pelo qual cada um trata as incertezas de medição quanto a existência de enfoques ou rigor diferenciados no tratamento da incerteza trazido em cada documento.

O resultado desta análise indica claramente que o ISO GUM é o mais importante e completo documento sobre incerteza de medição. Indica também que os demais documentos apresentam essencialmente o mesmo conceito trazido por aquele documento, com algumas explicações adicionais que os tornam diferenciados em algumas situações. Uma síntese desta análise é apresentada nos parágrafos a seguir.

## **2.1 - Análise comparativa dos principais documentos recentes sobre incerteza de medição**

O primeiro documento analisado é o Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement editado pela ISO e conhecido como “ISO Guide” ou “ISO GUM”. É o documento considerado referência sobre Incertezas de Medição, tendo sido publicado pela primeira vez em 1993 e revisado em 1995.

O documento estabelece regras gerais para a avaliação e expressão de incerteza em medições para utilização em padronização, calibração, credenciamento de laboratórios e serviços de metrologia. Tem o propósito básico de promover informação integral sobre a maneira pela qual o estabelecimento da incerteza foi alcançado, e prover uma base para a comparação internacional de resultados de medição.

Outro documento é o Guia para a Expressão da Incerteza de Medição, publicado inicialmente pela ABNT/INMETRO em 1997, e revisado em 1998. Ele é a tradução integral do ISO GUM para a língua portuguesa, tendo portanto o mesmo conteúdo daquele. Este foi o primeiro documento editado por um organismo nacional sobre incertezas de medição.

Nos Estados Unidos o documento mais completo sobre incerteza publicado inicialmente em 1997 e reeditado em 1998, também é o texto integral do ISO GUM. O documento é denominado American National Standard for Expressing Uncertainty – U.S. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement - ANSI/NC SL Z540-2-1997.

Outro documento publicado nos Estados Unidos é o Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results - NIST Technical Note 1297. Este documento que se trata de uma Nota Técnica, foi publicado inicialmente em 1993 por um comitê formado para estabelecer uma política do NIST sobre a expressão da incerteza da medição. Foi reeditado em 1994, apresentando algumas alterações terminológicas para sua adequação ao ISO GUM, além de responder a alguns questionamentos feitos pelos usuários da edição de 1993. Em decorrência disso, um novo apêndice foi incorporado ao documento, no qual se tenta esclarecer e dar diretrizes sobre alguns tópicos polêmicos relativos ao tema. Este documento apresenta sucintamente alguns aspectos do ISO GUM tratados no contexto da política do NIST, além de incluir algumas sugestões para tratamento da incerteza não incorporadas no documento ISO. As diretrizes dadas no documento indicam

sua aplicação na maioria dos resultados de medição do NIST, incluindo os resultados associados com comparações internacionais de padrões de medição, pesquisa básica, pesquisa aplicada e engenharia, calibração de padrões de medição de clientes e certificação de materiais padrões de referência, além da geração de dados de padrões de referência. Essas diretrizes adicionais são trazidas na forma de comentários sobre terminologia, avaliação tipo A e tipo B, além da identificação de componentes de incertezas, dentre outros.

Um outro documento importante, muito difundido na Europa que foi publicado em 1996 pelo EAL, atualmente EA, e recentemente traduzido para o português, publicado pela ABNT/INMETRO, tem o título EA-4/02 - Expression of the Uncertainty of Measurements in Calibrations - (EA) European Co-operation for Accreditation. No Brasil este documento foi publicado em janeiro de 1999 com o título "Versão Brasileira do Documento de Referência EA-4/02 - Expressão da Incerteza de Medição na Calibração e "Versão Brasileira do Documento de Referência EA-4/02-S1, Suplemento 1 ao EA-4/02 - Expressão da Incerteza de Medição na Calibração. Este documento tem o objetivo de harmonizar a avaliação da incerteza de medição entre os laboratórios europeus assistidos pelo grupo de certificação compreendidos pelo EA e brasileiros credenciados na Rede Brasileira de Calibração – RBC. As regras desse documento estão em acordo com as recomendações do ISO GUM, tendo sido elaboradas por uma força tarefa da EA, em substituição ao documento 19-1990 do WECC.

O documento EA-4/02 estabelece os princípios, os requisitos para a avaliação da incerteza de medição e como esta deve ser declarada nos certificados de calibração. As regras nele estabelecidas são gerais para avaliação e expressão da incerteza na medição, e por isso podem ser seguidas por muitos campos de medições físicas. O documento concentra sua proposta no que identifica como o método mais adequado para medições e calibrações laboratoriais, descrevendo para isso o caminho de avaliação do estado de incerteza de medição. Além dele apresentar um anexo sobre “Avaliação da melhor capacidade de medição” ele tem como diferencial do ISO GUM a simbologia quando trata da incerteza padrão combinada e a não citação da utilização do grau de abrangência  $k = 3$  para 99% de confiança, conforme pode ser visto na tabela 2.3.

Outro documento muito utilizado no Reino Unido é o The Expression of Uncertainty and Confidence in Measurement for Calibrations - UKAS (United Kingdom Accreditation Service), UK NIS 3003, edição 8. Este documento foi

publicado em 1995 pelo UKAS, substituindo a edição 7 de maio de 1991, tendo sido escrito para atender todos os campos das medições e calibrações. Sua nova edição atende às recomendações do CIPM, particularmente as recomendações do ISO GUM, uma vez que este foi tomado como referência na sua elaboração. O documento além de apresentar um procedimento passo-a-passo para a determinação da incerteza de medição, e relacionar algumas fontes de erros e incertezas em calibrações de diversos campos de aplicações, tem como principal diferencial o rigor do tratamento dado ao cálculo de incertezas para o a calibração de um bloco padrão. Neste documento, diferentemente do ISO GUM, são usadas distribuições tipo B retangulares para todas as variáveis, tomando-se os graus de liberdade como  $\infty$  (infinito). Isso diferencia consideravelmente os contornos teóricos necessários aos casos práticos quando se tenta aplicar cada uma das recomendações.

Um outro documento muito utilizado é o EURACHEM, Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement. Este documento foi publicado em 1995 pelo LGC (Laboratory of the Government Chemist), tendo sido escrito para atender as medições e calibrações na área química. Sua primeira edição atende às recomendações do CIPM, particularmente as recomendações do ISO GUM, uma vez que este foi tomado como referência na sua elaboração. O Eurachem é um documento que estabelece regras gerais para a avaliação e expressão de incerteza em análise química quantitativa, baseado no ISO GUM sendo aplicável em todos os níveis de precisão e em todos os campos, desde análise rotineira até a pesquisa básica. A primeira edição foi revisada recentemente pelo grupo de trabalho de incerteza de medição do EURACHEM, cujo título é Draft EURACHEM/CITAC Guide Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement, publicado em junho de 1999, onde foram introduzidas alterações provenientes das experiências conseguidas com a aplicação prática da incerteza em laboratórios de química.

A tabela 2.3 mostra algumas diferenças formais na simbologia em alguns dos documentos discutidos. Dela podemos verificar que, embora a simbologia utilizada não seja uniforme, os conceitos utilizados são os mesmos. Dessa não uniformização destacamos ainda o símbolo da incerteza padrão combinada utilizado pelo EA-4/02 que é o mesmo da incerteza padrão. Dessa forma o EA enfoca a incerteza padrão combinada como se fosse mais um “tipo” de incerteza, além da incerteza tipo A e da incerteza tipo B. Embora este enfoque não traga diferença no conceito sobre

incerteza, pode trazer mais confusão quanto ao entendimento das incertezas padrão tipo A e B, pois a incerteza padrão combinada como o próprio nome diz, é a combinação das incertezas padrão tipo A e tipo B que podem estar presentes em uma medição.

Além disso, as diferenças na simbologia instigam dúvidas com decorrências conceituais muito importantes no tratamento das incertezas, dúvidas estas facilmente solucionáveis pela simples adoção de uma terminologia e simbologia comum, preferencialmente compatível com a apresentada no ISO GUM.

Tabela 2.3 – Comparação de alguns tratamentos utilizados nos vários documentos publicados

	ISO GUM (1995), ABNT GUIA (1998) ANSI/NCSS (1998)	NIST TN1297 (1994)	NIS 3003 (1995)	EA-4/02 (1996)
<b>Incerteza Padrão Combinada</b>	$\sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i)}$			
<b>Coeficiente de abrangência</b>	$k=2$ (95%) $k=3$ (99%)			$k=2$ (95%)
<b>Incerteza Expandida</b>	$U=k.u_c$			$U=k.u$
<b>REPRESENTAÇÕES</b>				
<b>Média</b>	$\bar{q}$	$\bar{X}_i$	$\bar{x}$	$\bar{q}$
<b>Variância</b>	$s^2(\bar{q})$	$s^2(\bar{X}_i)$	$s^2(\bar{x})$	$s^2(\bar{q})$
<b>Incerteza Padrão Combinada</b>	$u_c(y)$			$u(y)$
<b>Incerteza Expandida</b>	$U$			$U$

## Capítulo 3

### 3 - O TRATAMENTO DAS INCERTEZAS DE MEDIÇÃO

O objetivo geral de uma medição é determinar um valor numérico para representar a grandeza que se quer medir, formalmente chamada de mensurando (INMETRO, 1995).

A partir desse conceito, pode-se afirmar que uma medição se caracteriza pela definição do mensurando, do método a ser utilizado e do seu procedimento de execução (ISO, 1995). A definição do mensurando diz respeito à determinação clara do que se pretende medir, tanto pela sua especificação quanto pela delimitação dos limites pretendidos para a medição. Um exemplo disso é a medição comparativa de um comprimento de uma peça teste, que envolvesse a sua medição e a de um padrão para constatação das diferenças. Nesta situação o mensurando é portanto definido quando o comprimento é identificado como variável a medir, e seus limites previstos dentro das expectativas. O método se refere aos princípios físicos a serem utilizados na medição. O mesmo exemplo poderia envolver a utilização de um instrumento comparador de comprimentos que medisse por contato mecânico. Já o procedimento, se refere à seqüência detalhada de operações que deveriam ser executadas para, através do método, ser obtido um valor numérico para representar o mensurando, dentro dos valores previstos para o resultado.

Embora a caracterização de uma medição seja teoricamente simples, alguns problemas ocorrem nos casos práticos que obrigam o acréscimo de outros elementos nesta caracterização. Ocorre que, em geral, sob boas hipóteses, o resultado de uma medição é apenas uma estimativa do valor do mensurando. Isso porque, invariavelmente, as medições são influenciadas por fatores internos e externos, fazendo com que seus resultados variem em maior ou menor intensidade

sob a ação dessas influências. Portanto, quando uma medição é bem executada tem-se uma boa estimativa para a variabilidade dos resultados, devendo esta variabilidade ser adequada quando comparada ao valor obtido para o mensurando. Disso resulta a necessidade de acrescentar aos requisitos de uma medição, além dos limites da variação dos resultados, alguma acertiva sobre a confiança associada ao fato dos resultados efetivamente permanecerem dentro dos limites estabelecidos. A variabilidade é determinada com base em hipóteses estatísticas, através de parâmetros matemáticos que representem a variação dos resultados. Já a acertiva sobre a confiança é determinada exatamente pela incerteza de medição, ambos elementos de discussão dos tópicos apresentados a seguir.

### **3.1 - Conceitos básicos da estatística.**

Teoricamente, a medição repetida de uma dada grandeza exibiria resultados idênticos somente se fosse possível, durante sua execução, manter constantes as influências de todos os fatores que nela interferem tais como o operador, o material medido, o método, o ambiente, etc. Entretanto, é impossível manter todos os fatores constantes durante todo o tempo de realização de uma medição. A rigor, mesmo alguns fatores julgados constantes, não o são perfeitamente, sendo por isso inevitável que entre os resultados de uma medição seja verificada alguma variação.

Variação é então a diferença verificada entre os resultados encontrados para um mensurando, e pode ser causada por fatores de origem sistemática ou aleatória.

Os fatores de origem sistemática aparecem numa medição de forma intermitente. Eles podem ser atribuídos ao processo de medição e por serem intermitentes, são facilmente detectados e identificados quando ocorrem. Assim, podem ser geralmente reduzidos ou eliminados.

Já os fatores de origem aleatória estão sempre presentes e, na maioria das vezes, são de difícil detecção e identificação. Podem em geral ser minimizados melhorando o processo de medição e aumentando o número de repetições na coleta das amostras do mensurando.

Embora aleatória, variações desta natureza podem ser representadas por modelos que não permitem sua determinação exata, porém fornecem informações úteis sobre o comportamento provável destas variações. Tais modelos são conhecidos como distribuição de freqüências.



Para discutir e caracterizar as variações é necessário inicialmente estabelecer qual o conjunto de resultados que tais variações deve representar, ou seja, deve-se decidir se as variações representam uma população ou sua amostra.

Em estatística, o termo população é usado para se referir à totalidade de itens considerados, dos quais se procura alguma informação. A amostra é a parte representativa da população que fornece essas informações. Diante disso, pode-se dizer que, numa medição, a população contém ou reúne todos os valores possíveis do mensurando e a amostra são os diversos valores conseguidos quando o mesmo é medido. Por exemplo, se a característica a ser medida é um mensurando de 50 mm, a população é o conjunto de todos os valores possíveis para 50mm e a amostra é o conjunto dos resultados obtidos quando o valor de 50 mm é medido, tais como os 5 resultados mostrados na tabela 3.1.

Tabela 3.1 - População e amostra do mensurando de 50 mm

População	Amostra
Todos os valores possíveis para o mensurando de 50 mm	Conjunto de valores encontrado na medição. (50,1 - 50,2 - 50,0 - 49,9 - 50,1)

Uma vez que a amostra tenha sido coletada pode-se calcular parâmetros matemáticos com os números contidos na amostra, através dos quais torna-se possível fazer inferências sobre o comportamento da população de onde a mesma foi extraída. Esse cálculo de parâmetros pode ser chamado de estimação e os parâmetros de estimadores. A tabela 3.2 a seguir ilustra alguns importantes parâmetros populacionais e seus estimadores amostrais.

Tabela 3.2 - Estimadores e parâmetros populacionais Normais

Parâmetro	Medida Populacional	Estimador Amostral
Média	$\mu$	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
Desvio Padrão	$\sigma$	$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$
Variância	$\sigma^2$	$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

A média é uma medida de posição que tem a função de indicar onde está posicionada a distribuição. Por isso, ela é uma medida típica para expressar o centro

da distribuição, sendo por isso conhecida como expectância ou esperança matemática.

Em se tratando da população, a média pode ser calculada conforme ilustra a expressão 3.1 a seguir.

$$\mu = \int xf(x)dx = E(x) \quad (3.1)$$

Onde:

$f(x)$  é a função densidade de probabilidade da variável aleatória  $x$ .

$\mu$  é a média da população.

$E(x)$  é a esperança da variável  $x$

Quando os valores  $x_i$  da população e da amostra são conhecidos, ao invés das suas funções densidade de probabilidade  $f(x)$ , seu cálculo pode ser realizado conforme ilustram as expressões (3.2) e (3.3).

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \quad (3.2)$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (3.3)$$

Onde:

$\bar{x}$  é a média da amostra

$\mu$  é a média da população.

$n$  é o número de elementos da amostra (número de observações)

$N$  é o número de elementos da população

A variância é uma medida de dispersão que tem por função indicar como estão distribuídos os valores em torno da média anteriormente citada. As expressões (3.4) e (3.5) a seguir ilustram seu cálculo.

$$\sigma^2 = E\{[x - E(x)]^2\} = E(x^2) - E(x)^2 \quad (3.4)$$

$$\sigma^2 = \int x^2 f(x) dx - \mu^2 \quad (3.5)$$

Nas expressões (3.4) e (3.5) as variáveis tem mesmo significado das apresentadas para as expressões (3.2) e (3.3).

Novamente, quando os valores de  $x_i$  da população e da amostra são conhecidos, seu cálculo pode ser realizado como indicado nas expressões (3.6) e (3.7).

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N} \quad (3.6)$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad (3.7)$$

Já o desvio padrão é calculado pela raiz quadrada positiva da variância. Assim, o desvio padrão populacional e amostral são dados conforme ilustram as expressões (3.8) e (3.9).

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2}{N}} \quad (3.8)$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (3.9)$$

Ocorre que parâmetros como médias, ou esperança matemática, variâncias e desvio padrão, representam posição e dispersão de distribuições específicas de probabilidade, devendo por isso ser avaliados para cada caso específico. Por isso, torna-se necessário abordar as principais distribuições de probabilidade, sendo isso feito através da distribuição Normal e t-student.

A distribuição Normal possui aspecto de um sino e para sua construção, são necessários dois parâmetros: a média ( $\mu$ ) e o desvio padrão ( $\sigma$ ). A curva teórica é simétrica em relação a média, sendo sua representação matemática dada por:

$$N(\mu, \sigma) = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (3.10)$$

Onde:

$x$  é a variável aleatória

$\mu$  é a medida de tendência central (média da população)

$\sigma$  é o desvio padrão da população

A curva normal abrange o intervalo  $-\infty, +\infty$ . Por ser uma curva de probabilidades, a área limitada sob a mesma representa a probabilidade de se encontrar observações no intervalo. As expressões (3.11) a (3.13) a seguir ilustram algumas das relações válidas para as distribuições de probabilidade, dentre elas a Normal em discussão.

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx \quad ; \quad f(x) = N(\mu, \sigma^2) \quad (3.11)$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad ; \quad f(x) = N(\mu, \sigma^2) \quad (3.12)$$

$$\int_{-a}^{\mu} f(x)dx = \int_{\mu}^{+a} f(x)dx \quad ; \quad f(x) = N(\mu, \sigma^2) \quad (3.13)$$

Verifica-se também que a média  $\mu$  coincide com o ponto de máximo da função  $f(x)$ , e a distância entre  $\mu$  e o ponto onde a função muda a concavidade (ponto de inflexão) é o desvio padrão  $\sigma$ . A figura 3.1 ilustra esses detalhes.

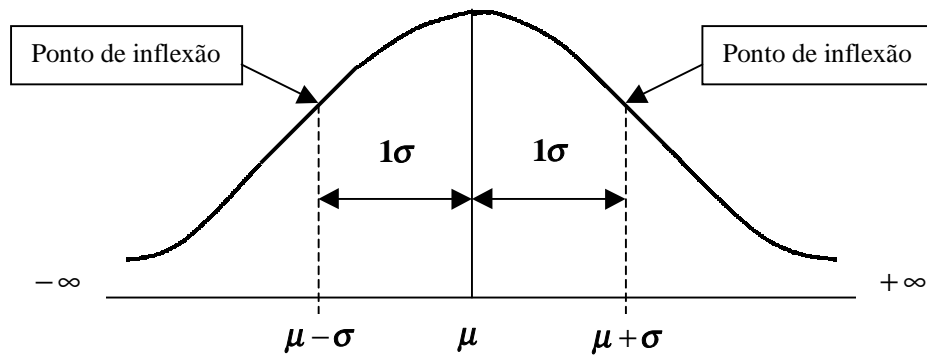


Figura 3.1 - Curva Normal

É comum que a área sob a curva Normal seja dividida em zonas de probabilidades, cada uma das quais  $2\sigma$  mais larga que a anterior, conforme pode ser visto na figura 3.2.

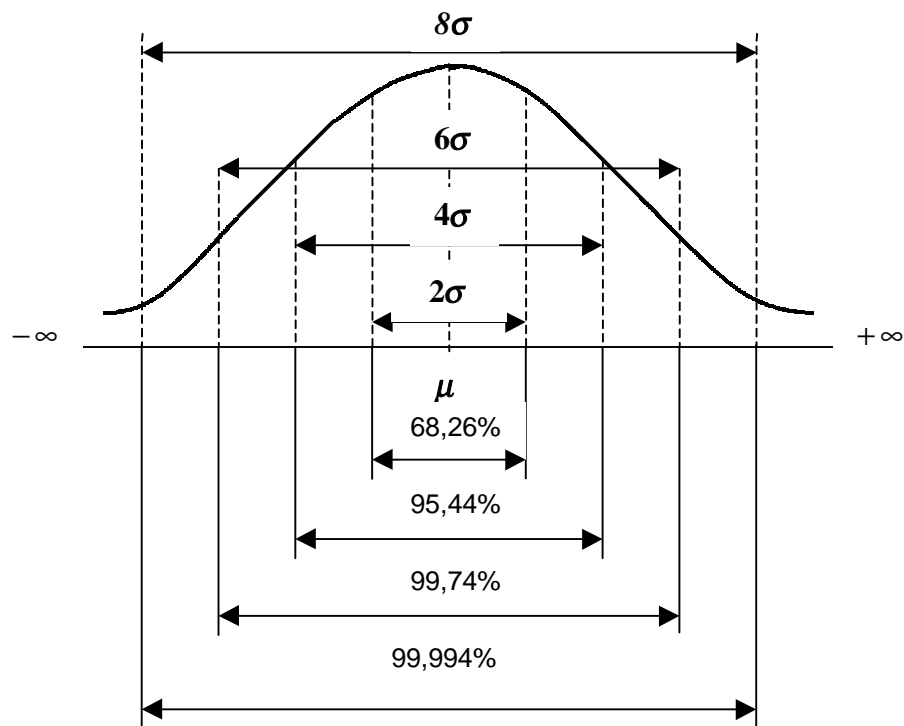


Figura 3.2 - Zonas de probabilidade da curva Normal

Para o cálculo de probabilidades Normais num intervalo genérico  $[a,b]$ , procede-se conforme indicado em (3.11) utilizando  $f(x)$  conforme definida em (3.10).

Para se calcular probabilidades Normais, sem o desenvolvimento da integral indicada nas expressões (3.10) e (3.11), pode-se alternativamente reduzir a variável

conforme indicado na expressão (3.14) e determinar a probabilidade com o uso da tabela da Normal Reduzida mostrada no anexo 1.

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \quad (3.14)$$

Desta forma tem-se o valor padronizado de  $z$ , que se comporta de acordo com uma distribuição Normal  $N(0,1)$ .

A distribuição t-student possui também aspecto gráfico de um sino, sendo necessário também para sua construção, dois parâmetros: a média ( $\bar{x}$ ) e o desvio padrão ( $s$ ).

Analogamente à Normal, sua curva teórica é simétrica em relação a média e para se calcular probabilidades t-student pode-se alternativamente reduzir a variável conforme indicado na expressão 3.15 e determinar a probabilidade com o uso da tabela t-student mostrada no anexo2.

$$t = \frac{x_i - \bar{x}}{s/\sqrt{n}} \quad (3.15)$$

Para se calcular os valores da distribuição t-student é necessário também conhecer o grau de liberdade “v”, associado ao número de repetições da medição, ou seja o tamanho amostral. Os graus de liberdade para uma amostra com  $n$  repetições da mesma medida é definido por

$$v \text{ (graus de liberdade)} = n - 1 \quad (3.16)$$

A tabela da distribuição t-student, anexo 2, fornece probabilidades para esta distribuição.

As distribuições Normal e t-student são as distribuições mais utilizadas nas medições. É através delas que é possível estimar o valor de um mensurando e determinar o seu intervalo de confiança para um grande número de casos práticos. A distribuição normal deve ser utilizada para amostras grandes ( $n > 30$ ) e a t-student para amostras pequenas ( $n \leq 30$ ) (Werkema, 1996).

Outras distribuições como a retangular, trapezoidal e triangular, por serem menos comuns serão discutidas em conjunto com o tratamento das incertezas.

### 3.2 - Especificação da Incerteza.

Conforme anteriormente citado, o resultado de uma medição  $R_m$ , que é somente uma estimativa do valor do mensurando, somente é completo quando acompanhado por uma declaração de qual é a sua confiança. Essa confiança é expressa exatamente pela incerteza.

Formalmente, a incerteza de medição é definida como um “parâmetro, associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão dos valores que poderiam ser razoavelmente atribuídos ao mensurando” (ABNT/INMETRO, 1998). Esta definição é ainda complementada pelas seguintes observações:

1. Parâmetro pode ser, por exemplo, um desvio padrão (ou um múltiplo dele), ou a metade de um intervalo correspondente a um nível de confiança estabelecido;
2. A incerteza de medição compreende, em geral, muitos componentes. Alguns destes componentes podem ser estimados com base na distribuição estatística dos resultados de séries de medições e podem ser caracterizados por desvios padrão experimentais. Os outros componentes, que também podem ser caracterizados por desvios padrão, são avaliados por meio de distribuições de probabilidades assumidas, baseadas na experiência ou em outras informações;
3. Entende-se que o resultado da medição é a melhor estimativa do valor do mensurando, e que todos os componentes da incerteza, incluindo aqueles resultantes dos efeitos sistemáticos, como os componentes associados com correções e padrões de referência, contribuem para a dispersão.

Com base nessas afirmações conclui-se que o resultado de uma medição  $R_m$  deve incluir uma declaração sobre a incerteza de medição e que esta declaração deve ser expressa como uma variação  $V_m$  do valor medido. Por exemplo, o resultado de uma medição para um diâmetro externo poderia ser expresso como 50 mm  $\pm$  10  $\mu$ m. Isto significa dizer, com alguma segurança, que o valor do diâmetro varia e está no intervalo compreendido entre 49,99 mm e 50,01 mm.

Essa segurança é caracterizada pela confiança associada ao intervalo de  $\pm 10$   $\mu\text{m}$  - que é a incerteza - dentro do qual se espera que o valor de 50mm esteja contido. Essa confiança associada é normalmente estabelecida para medições em 95%.

Para se chegar à declaração da incerteza de medição é necessário conhecer detalhes práticos importantes, relativos à medição e necessários para a realização do seu cálculo. Os detalhes são as fontes de incerteza presentes, o modelo matemático que representa o sistema de medição, as incertezas padrão, seus tipos, a incerteza padrão combinada, a incerteza expandida e, finalmente, o procedimento detalhado para avaliar e expressar a incerteza. Tais detalhes são discutidos nos itens a seguir.

### **3.2.1 - Fontes de Incerteza**

Em uma medição, existem fenômenos que ocorrem de forma a afetarem o valor do mensurando. As origens desses fenômenos são conhecidas como fontes de incerteza.

Não existe uma única definição formal de fonte de incerteza. O documento EAL-R2 (EAL, 1997) descreve fonte de incerteza como os fenômenos que contribuem para a incerteza e assim para o fato do resultado de uma medição não ser caracterizada por um único valor. A ISO DTR 14253-2 (ISO, 1997) a descreve como a característica que afeta o resultado de uma medição.

As muitas fontes de incerteza que podem existir em uma medição, podem ocorrer de forma isolada ou seja, sem depender de outras, ou em conjunto. Entre estas fontes está o efeito das condições ambientais e de outras grandezas de influências que atuam sobre o procedimento de medição, sobre o instrumento ou sobre o mensurando.

Há fontes de incerteza que são atribuídas ao instrumento e ao observador, ou mesmo ao procedimento de medição, caso típico quando a amostra não é representativa para o mensurando.

Outra fonte de incerteza na medição aparece quando parâmetros ou constantes externas são usadas no cálculo do resultado final. Esse é o caso típico do uso de coeficientes de expansão linear retirados de livros e tabelas de fabricantes para calibrações dimensionais, do arredondamento de valores de incertezas extraídas de certificados, das aproximações e arredondamentos de constantes, etc.



Uma importante fonte adicional de incerteza, que aparece freqüentemente nas medições, é a definição incompleta do mensurando. Esse é caso típico quando não se define o local onde se deve medir uma determinada grandeza, por exemplo a dureza de um material. Nesse caso, em cada local medido poderá ser encontrado um valor diferente de dureza, produzindo uma incerteza que pode não ser representativa para o mensurando.

Na prática, existem muitas fontes de incerteza além das citadas. A figura 3.3 apresenta algumas fontes de incerteza típicas da área dimensional. Uma lista de incertezas típicas em outras áreas de medição é apresentada no anexo 3.

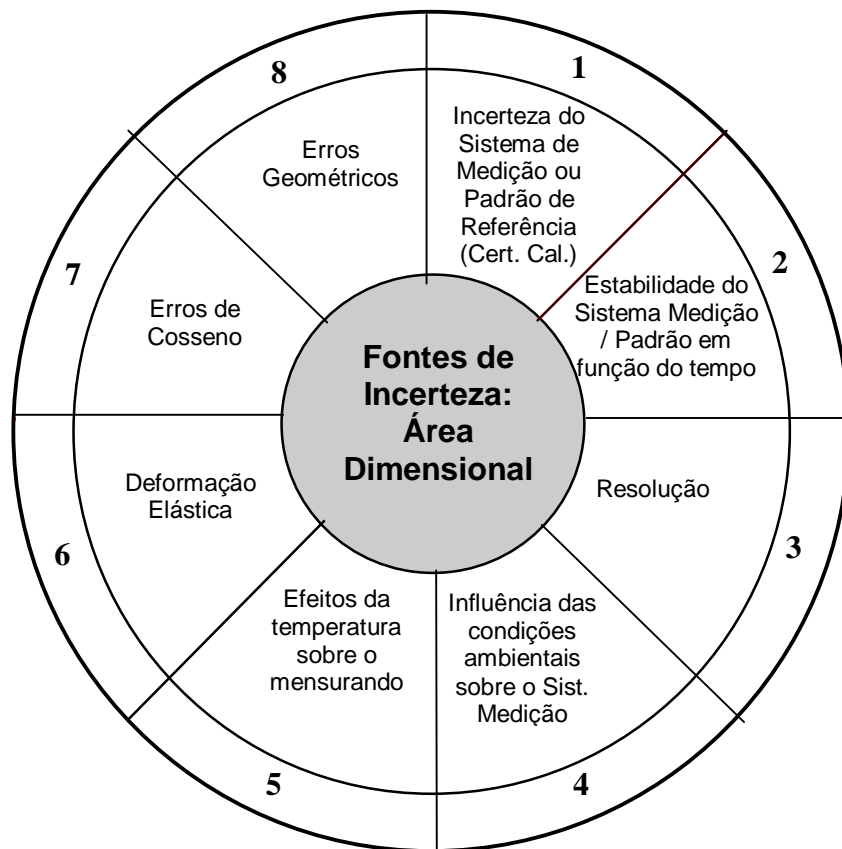


Figura 3.3 - Fontes de Incerteza - Área Dimensional

### 3.2.2 - Incerteza padrão Tipo A e Tipo B

Para calcular a incerteza de uma medição, a metodologia atualmente recomendada pelos principais documentos (NIST, 1994; ISO, 1995; UKAS, 1995; EAL, 1996; ABNT, 1998; U.S., 1998) estabelece que a incerteza deva ser expressa

por um valor que estime o desvio padrão de uma variável aleatória, representando os infinitos valores que podem ser atribuídos ao resultado de uma medição. Estabelecem ainda que a incerteza possa ser expressa não somente pelo valor mas também por um múltiplo especificado deste.

Dentro dessas orientações, a estimativa do desvio padrão é chamado incerteza padrão ( $u$ ), a combinação dos desvios padrão é chamada incerteza padrão combinada ( $u_c$ ) e o múltiplo da anterior é chamado incerteza expandida ( $U$ ) (ISO, 1995). Cada um desses parâmetros é discutido nos itens a seguir.

### **Incerteza Padrão ( $u(x_i)$ )**

Há essencialmente duas categorias de incerteza que se caracterizam em função do método utilizado para estimar seu valor numérico, a incerteza padrão avaliada pelo método Tipo A e a incerteza padrão avaliada pelo método Tipo B.

A incerteza padrão avaliada pelo método Tipo A é caracterizada quando se dispõe de uma distribuição de freqüências, ou seja, de uma amostra estatística de resultados individuais de uma medição. O ponto médio destes valores, chamado média amostral ou simplesmente média, conforme mostrado pela expressão (3.1), corresponde à estimativa do mensurando, enquanto que a raiz quadrada da variância experimental, corresponde a incerteza padrão associada ao estimador, conforme ilustrado pelas expressões (3.8) e (3.9).

Entretanto, na determinação da incerteza padrão há que se considerar o fato da incerteza determinada se referir a uma população ou a sua amostra dentro dos conceitos anteriormente apresentados e de acordo com a equações acima citadas. Como já discutido, população se refere à totalidade de itens considerados, e considera todos os valores possíveis para a variável no intervalo de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Na prática porém, esse intervalo pode estar restrito, por exemplo, a valores positivos.

De qualquer modo, o ponto relevante a ser considerado se refere à estimativa da variância a ser utilizada para o cálculo da incerteza padrão, devendo-se distinguir e corrigir os valores em se tratando de variâncias experimentais da amostra ou variâncias populacionais, também chamadas de variâncias experimentais da média.

Dado que se tenha a média amostral ( $\mu$ ) dada pela equação (3.2), ou sua estimativa dada pela equação (3.1), pode-se calcular a variância experimental da amostra conforme expressão (3.9) e corrigi-la pelo tamanho amostral para obtenção

da variância experimental da média que será usada como incerteza padrão Tipo A. A equação (3.17) a seguir ilustra o procedimento.

$$u(x) = \sqrt{s(\bar{x})^2} \quad (3.17)$$

Já a incerteza padrão avaliada pelo método Tipo B é aplicada quando sua avaliação é baseada em algum outro conhecimento científico que não a análise estatística de uma série de observações. Esta situação é muito usual em casos práticos, ocorrendo, por exemplo, quando os valores da amostra são todos coincidentes ou mesmo quando é realizada apenas uma avaliação do mensurando. A mesma situação ocorre quando o valor em questão vem da literatura, caso típico de propriedades tabeladas, ou mesmo dados de certificados que não incluem informações adicionais sobre o valor declarado. Nestes casos, é necessário estabelecer suposições razoáveis acerca da função de distribuição de probabilidade associada ao valor de interesse. Para isso podem ser usados, por exemplo, informações de medições anteriores, dados de experiências realizadas com o instrumento, especificações do fabricante, informações sobre propriedades do mensurando, dados dos certificados de calibração, erros máximos supostos para os valores de propriedades tomados de literatura, etc.

Para o cálculo das incertezas Tipo B cabem as seguintes considerações.

Em princípio, se tempo e recursos fossem ilimitados de forma a se ter condições de executar investigações estatísticas exaustivas de todas as causas imagináveis da incerteza, todas as incertezas padrão poderiam ser avaliadas como sendo do Tipo A.

Como em muitas ocasiões isto é impossível, principalmente por falta de tempo, é necessário dispor de uma metodologia alternativa, que permita estimar o desvio padrão associado ao estimador de uma grandeza, isto é, sua incerteza padrão, mediante procedimentos de cálculo que não estejam baseados em uma distribuição da frequência observada a partir das medições repetidas dessa grandeza.

Desta forma, para uma estimativa de uma grandeza de entrada  $x_i$ , que não tenha sido obtida de observações repetidas, a variância estimada  $u^2(x_i)$  ou a incerteza padrão  $u(x_i)$  é avaliada pelo julgamento científico baseado em todas

informações disponíveis da variabilidade de  $x_i$ . Assim,  $u^2(x_i)$  e  $u(x_i)$  são chamados de variância e incerteza padrão Tipo B.

Na avaliação dos componentes de incerteza podemos tomar algumas fontes de incertezas Tipo B (NAMAS, 1995):

- Gradiente de temperatura durante a medição;
- Diferença da temperatura ambiente com relação a temperatura de referência de 20°C;
- Tipo de indicador, se analógico ou digital;
- Instabilidade de leitura, da rede elétrica, do padrão e temporal;
- Paralaxe;
- Resolução;
- Incerteza do padrão;
- Erros geométricos;
- Deformações mecânicas;
- Procedimento operacional de calibração;
- Efeitos das condições ambientais;

Para a avaliação da incerteza Tipo B existem várias distribuições de probabilidade que são de grande utilidade: Distribuição Normal, distribuição t-Student, distribuição retangular ou uniforme, que é empregada com maior frequência, distribuição trapezoidal, que é mais geral que a retangular, além da triangular e da distribuição tipo “U” que são apropriadas para alguns casos especiais. Algumas regras podem ser observadas para a correta utilização das várias distribuições. Dentre elas cita-se:

Nos casos em que a estimativa  $x_i$  é retirada da especificação do fabricante, certificado de calibração, manuais ou outras fontes, e sua incerteza for citada como um múltiplo do desvio padrão, a incerteza padrão  $u(x_i)$  é simplesmente o valor citado dividido pelo multiplicador, e a variância estimada  $u^2(x_i)$ , é o quadrado do quociente.

Para os casos em que a incerteza é obtida de um certificado de calibração onde o nível de confiança ou o fator de abrangência ( $k$ ) tenha sido informado, esta

incerteza pode ser tratada como proveniente de uma distribuição de probabilidades normal, e a incerteza padrão, nesse caso, será dada por (NAMAS, 1995)

$$u(x_i) = \frac{U}{k} \quad (3.18)$$

Onde  $U$  é a incerteza expandida que foi informada.

Nesse caso, a incerteza  $u(x_i)$ , não é citada como um múltiplo do desvio padrão, mas, ao invés disso, como um parâmetro ao qual está associado um nível de confiança de 90, 95 ou 99 %. Salvo indicação contrária, poderá ser assumido que a distribuição Normal é adequada e será usada para o cálculo da incerteza citada. A incerteza padrão  $u(x_i)$  pode então ser encontrada dividindo-se a incerteza dada pelo fator  $k$ , apropriado para a distribuição Normal. Os fatores correspondentes a 90, 95 ou 99 % são resumidos na tabela 3.3 a seguir, podendo os mesmos ser igualmente determinados com auxílio da tabela da Normal reduzida mostrada no anexo 1.

Tabela 3.3 - Valor do fator de abrangência  $k$  e seu respectivo nível de confiança

Nível de Confiança (%)	Fator de Abrangência ( $k$ )
50	0,675
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

Para os casos onde possa ser suposta uma chance de 50% ou 0,5 de que o valor de  $x_i$  esteja no intervalo  $a_-$  até  $a_+$ , ainda sob a hipótese da Normalidade da sua distribuição, a melhor estimativa de  $x_i$  pode então ser tomada como o ponto médio do intervalo. Adicionalmente, se a meia largura do intervalo é designada por  $a = (a_+ - a_-)/2$ , toma-se  $u(x_i) = a/0,675 = 1,48a$ , uma vez que, para uma distribuição Normal de esperança  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , o intervalo  $\mu \pm \sigma/1,48$  abrange aproximadamente 50% da distribuição.

Considerando um caso similar ao anterior onde possa ser suposto que haja cerca de duas em três chances ( $2/3$ ) de que o valor de  $x_i$  esteja no intervalo  $a_-$  até  $a_+$  ou seja, a probabilidade de que  $x_i$  esteja neste intervalo é de cerca de 0,67 ou 67%, pode-se razoavelmente tomar  $u(x_i) = a$ . Isso porque, para uma distribuição Normal com esperança  $\mu$  e desvio padrão  $\sigma$ , o intervalo  $\mu \pm \sigma$  abrange 68,3% da distribuição que é suficientemente próximo de 67%.

Há outros casos, nos quais é possível estimar somente os limites  $a_+$  e  $a_-$  para  $x_i$ . Por exemplo, situações nas quais a grandeza de influência é a temperatura, a resolução do instrumento ou a histerese. Nestes casos, a probabilidade de que o valor  $x_i$  se encontre no intervalo  $a_-$  até  $a_+$ , para todo propósito prático, é igual a 1, e a probabilidade de que  $x_i$  esteja fora deste intervalo é essencialmente zero. Se não há conhecimento específico sobre a possibilidade de  $x_i$  estar efetivamente no intervalo, pode-se somente admitir que é igualmente provável encontrá-lo dentro ou fora, assumindo-se uma distribuição uniforme ou retangular. A figura 3.4. ilustra a situação.

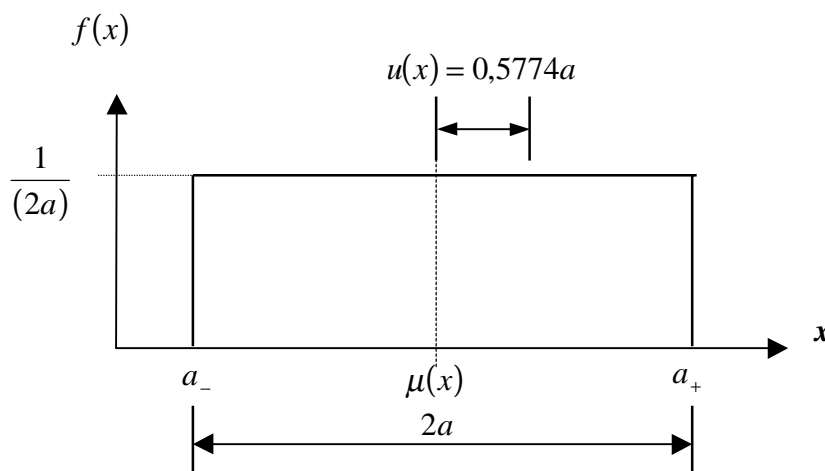


Figura 3.4 - Distribuição Retangular

Então  $x_i$  é o ponto médio do intervalo, dado por  $\mu(x) = (a_- + a_+)/2$ , e sua variância pode ser escrita na forma

$$u^2(x_i) = \frac{(a_+ - a_-)^2}{12} \quad (3.19)$$

Se a diferença entre os limites,  $(a_+ - a_-)$  vale  $2a$ , ou seja, os limites são simétricos, então a equação para a variância será:

$$u^2(x_i) = \frac{a^2}{3} \quad (3.20)$$

Desta forma a incerteza padrão associada será:

$$u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad (3.21)$$

Há outros casos nos quais os limites superiores e inferiores  $a_+$  e  $a_-$  para uma grandeza de entrada  $x_i$  não são simétricos em torno da média. Neste casos, se maiores informações acerca da distribuição de  $x_i$  não estão disponíveis, a variância de uma distribuição retangular com limites entre  $a_+$  e  $a_-$  deve ser utilizada conforme acima discutido, gerando a variância e a incerteza mostradas nas expressões (3.22) e (3.23).

$$u^2(x_i) = \frac{(a_+ + a_-)^2}{12} \quad (3.22)$$

$$u(x_i) = \frac{(a_+ + a_-)}{2\sqrt{3}} \quad (3.23)$$

Em muitos casos, é mais realista esperar que valores de  $x_i$  perto dos limites de um intervalo sejam menos prováveis que no seu ponto médio. Nestes casos convém utilizar a chamada distribuição trapezoidal simétrica ilustrada na figura 3.5, caracterizada por um trapézio isósceles cujas bases inferior e superior são, respectivamente,  $a_+ - a_- = 2a$  e  $2a\beta$  onde  $0 \leq \beta \leq 1$ . Na medida em que  $\beta \rightarrow 1$ , a distribuição trapezoidal se aproxima da distribuição retangular, enquanto que para  $\beta = 0$ , torna-se uma distribuição triangular mostrada na figura 3.6. Supondo tal distribuição trapezoidal para  $x_i$ , sua esperança toma-se  $x_i = (a_- + a_+)/2$  e sua variância é:

$$u^2(x_i) = \frac{a^2(1 + \beta^2)}{6} \quad (3.24)$$

Desta variância determina-se a incerteza padrão na forma.

$$u(x_i) = a \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{6}} \quad (3.25)$$

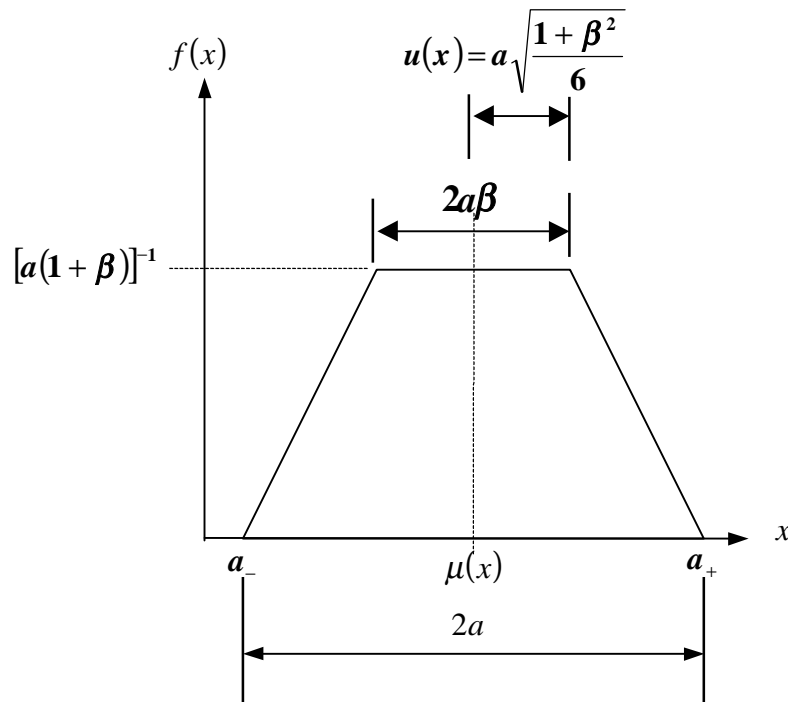


Figura 3.5 - Distribuição Trapezoidal Simétrica

Destas considerações, a incerteza padrão tomando  $\beta=0$  fica.

$$u^2(x_i) = \frac{a^2}{6} \quad (3.26)$$

Onde se deduz a incerteza padrão conforme mostrada na expressão (3.27).

$$u(x_i) = \frac{a}{\sqrt{6}} = 0,4082a \quad (3.27)$$



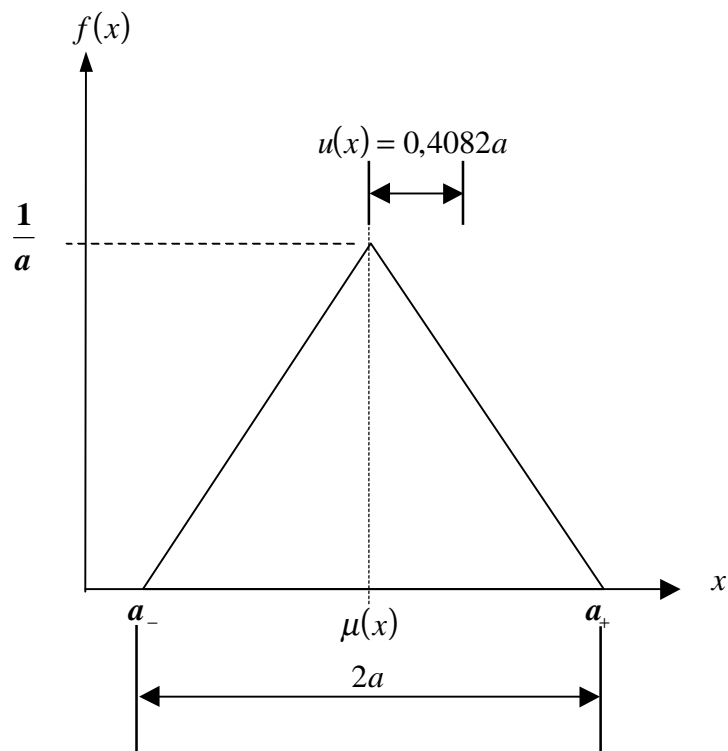


Figura 3.6 - Distribuição Triangular

A diferença essencial entre os procedimentos de cálculo de incertezas tipo A e B é fundamentada nas duas interpretações possíveis para o conceito de probabilidade. Na primeira interpretação, a probabilidade se assemelha à frequência relativa dos resultados aleatórios de um experimento que se realiza sob condições de repetitividade. Na Segunda, chamada bayesiana (Canguilhem, 1997), considera-se a probabilidade como uma descrição numérica dos possíveis resultados de um experimento, concebido sem a necessidade de realizá-lo sobre a base da informação disponível a respeito do mesmo. Um exemplo clássico que ilustra a interpretação bayesiana é a concessão de iguais probabilidades das duas formas possíveis em que uma moeda pode cair (Canguilhem, 1997) ou a concessão de iguais probabilidades das seis formas possíveis do sorteio de uma face de um dado. Mais radicalmente, teríamos o mesmo caso para as possibilidades de que o último dígito de um mostrador digital possa ficar parado.

Na incerteza padrão, embora as categorias Tipo A e Tipo B sejam divulgadas pelos documentos recentes, alertando para o fato de se tratar de um enfoque diferente do aplicado na teoria de erros, ainda existe uma confusão muito grande por

parte dos usuários quanto ao uso das incertezas Tipo A e Tipo B, confundindo-as com as incertezas Aleatória e Sistemática tradicional daquela teoria.

Essa confusão deve ter sido originada principalmente pelo uso tradicional dos conceitos de erros aleatórios e sistemáticos no treinamento de engenheiros e técnicos, sem que cuidados especiais fossem tomados quando da introdução dos conceitos dos Tipos A e B.

Em particular, questões sobre tais definições surgiram também no grupo de trabalho redator do ISO GUM. Parte dele entendia ser necessário o discernimento entre categoria A e B, com base no método de sua obtenção, enquanto que outros membros acreditavam que não haveria a necessidade desta classificação (Mathiesen, 1997). Outros detalhes sobre a questão serão levantados no capítulo 5.

Conforme discutido e orientado pelos documentos normativos do tratamento da incerteza, uma série de distribuições podem ser utilizadas. Apesar disso, os documentos sobre expressão de incerteza não informam os detalhes da determinação da variância e da incerteza padrão associada aos diferentes casos. Algumas informações sobre estes tratamentos serão vistas no capítulo 5.

### **3.3 - Avaliação e Expressão da Incerteza**

O método ideal para se avaliar e expressar a incerteza (ABNT, 1998) deve ser universal e aplicável a todos os tipos de medição, qualquer que sejam os tipos de dados de entrada, e em aplicações tão amplas quanto: controle e garantia da qualidade na produção; cumprimento de leis e regulamentos; pesquisa básica e aplicada, desenvolvimento da ciência e da engenharia; calibração de padrões e instrumentos, execução de ensaios, desenvolvimento, manutenção e comparação de padrões físicos de referência nacional e internacional, incluindo materiais de referência.

A avaliação e expressão da incerteza de medição pode ser efetuada sobre um só mensurando, ou sobre um conjunto deles, seguindo um procedimento pré estabelecido. Este procedimento começa com o modelamento da medição, passando pela determinação da incerteza padrão, incerteza padrão combinada, incerteza expandida e finalmente pela apresentação do resultado de medição. Os itens a seguir detalham este procedimento.

### 3.3.1 - Modelamento da Medição

Medição é o conjunto de operações pelas quais o valor de um mensurando  $y$  é obtido. Na maioria das vezes ele não é medido diretamente, mas é determinado a partir da combinação de valores de  $M$  outras grandezas  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$  através de uma relação funcional  $f(X)$ , segundo um modelo matemático. Desta forma, o primeiro passo no modelamento é expressar matematicamente a relação entre o mensurando  $y$  e as grandezas de entrada  $x_i$ , das quais  $y$  depende, utilizando um modelo matemático na forma.

$$y = f(X) \tag{3.28}$$

Onde:

$M \geq 1$  é a quantidade de grandezas de entrada.

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_M\}$  são as grandezas de entrada

$y$  é a grandeza de saída.

$f(X)$  é a relação funcional.

A relação funcional representa o procedimento de medição e o método de avaliação, e deverá conter todas as grandezas incluindo suas correções, fatores de correção, que contribuam de algum modo com alguma componente significativa de incerteza.

As grandezas de entrada  $x_i$  podem representar variáveis de igual ou distintas naturezas entre si. Seus valores e incertezas são obtidos tanto a partir das indicações, únicas ou repetidas, obtidas de instrumentos de medição, como de dados fornecidos pelos fabricantes dos instrumentos, da experiência, a critério do observador, da literatura, de medições anteriores, realizadas seja pelo mesmo ou por outro observador, de padrões de calibração, de materiais de referência ou de certificados de calibração.

Além disso, algumas das grandezas  $x_i$  podem depender de outras. O próprio mensurando  $y$ , incluindo as correções, somadas ou multiplicadas por efeitos sistemáticos além dos resultados das medições intermediárias usadas na sua determinação. Assim, o modelo representado pela equação (3.28) não representa,

em geral, somente uma lei física, mas é também a expressão de um procedimento de medição completo. Com isso, o valor de  $y$  na expressão (3.28) pode ser interpretado como:

a) Uma grandeza única e invariável, porém intrinsecamente indeterminada. Esta grandeza só pode ser estimada quando for determinada cada uma das grandezas de entrada  $x_i$ . A grandeza  $y$ , que representa o mensurando pode, em princípio, tomar infinitos valores dependendo dos resultados que envolva o procedimento de medição para cada um desses estimadores. Logo, as grandezas  $y$  e  $x_i$  podem ser interpretadas também como variáveis aleatórias contínuas.

b) O valor numérico de  $y$ , é obtido substituindo os estimadores das variáveis  $x_i$ , dados pela expressão (3.1), na expressão (3.28). Desta maneira, o modelo matemático que representa a medição efetuada é dado como mostra a expressão (3.29).

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_M) \quad (3.29)$$

### 3.3.2 - Determinação da Incerteza Padrão $u(y)$

Após determinar o modelo da medição, é necessário determinar a incerteza padrão associada ao resultado do procedimento de medição. Ela é, por definição, igual ao desvio padrão estimado da variável aleatória  $y$  que representa o mensurando (ABNT/INMETRO, 1998). Para este parâmetro é usado o símbolo  $u(y)$ , sendo ela dependente dos desvios padrão estimados  $u(x_i)$  de cada um dos valores estimados  $x_i$ .

Para determinação da incerteza padrão  $u(y)$  torna-se necessário avaliar as incertezas  $u(x_i)$  considerando se tratarem de incertezas Tipo A ou Tipo B conforme anteriormente discutido.

### 3.3.3 - Determinação da Incerteza Padrão Combinada ( $u_c$ )

A incerteza padrão combinada  $u_c$  é o valor da incerteza obtida da combinação das incertezas dos diversos fatores de influência na medição, de acordo com um modelo matemático que reflita fielmente a física do problema. Para calculá-la é necessário portanto se conhecer as incertezas padrão  $u(x_i)$ , associadas aos estimadores das grandezas de entrada, não importando se as mesmas tenham sido avaliadas pelo método A ou B, combinando-as segundo uma expressão apropriada (3.30) ou (3.31) vistas a seguir.

Conforme mencionado, após a avaliação das incertezas padrão tipo A e tipo B o próximo passo é calcular o resultado de medição, ou seja a estimativa de  $y$ , e determinar a incerteza padrão combinada  $u_c(y)$  do resultado de medição  $y$ , a partir das incertezas padrão e covariâncias associadas com as estimativas de entrada.

As estimativas de entrada  $x_1, x_2, \dots, x_M$ , podem ser classificadas como grandezas estatisticamente independentes (não correlacionadas) ou estatisticamente dependentes (correlacionadas), cujos conceitos e tratamentos são discutidos nos tópicos a seguir.

#### Grandezas estatisticamente independente ou não correlacionadas

Nestas grandezas são consideradas as séries de medições realizadas com diferentes sistemas de medição. Neste caso, a incerteza padrão combinada  $u_c(y)$  é a raiz quadrada positiva da variância combinada  $u_c^2(y)$ , que é dada por.

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) \equiv \sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 \quad (3.30)$$

$$c_i \equiv \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \Big|_{x=x_i} \quad (3.31)$$

Onde

$u_c^2(y)$  é a variância combinada

$\frac{\partial f(X)}{\partial x}$  é a derivada parcial com respeito à grandeza de entrada

$c_i$  é o coeficiente de sensibilidade

$f(X)$  é a função dada na equação (3.28).

$u(x_i)$  é a incerteza padrão avaliada pela avaliação tipo A ou tipo B.

Os cálculos requeridos para se obter os coeficientes de sensibilidade  $c_i$ , através de diferenciação parcial pode ser um processo longo, particularmente quando há muitas contribuições individuais  $x_i$  e as correspondentes incertezas estimadas.

Se a relação funcional dada pela expressão (3.28) não é conhecida para um sistema particular de medição, os coeficientes de sensibilidade  $c_i$  podem ser obtidos pela sua aproximação, conseguida variando uma das entradas  $x_i$  e avaliando a grandeza de saída  $y$  enquanto todas as outras variáveis  $x_i$  de entrada são mantidas constantes.

Os documentos existentes sobre expressão de incerteza não esclarecem qual é o significado matemático do coeficiente de sensibilidade  $c_i$ , motivando-nos a apresentar sucintamente uma discussão a respeito no capítulo 5 deste trabalho.

### **Grandezas estatisticamente dependente ou correlacionadas**

Grandezas medidas com o mesmo sistema de medição ou com sistemas dependentes entre si, geram variáveis consideradas dependentes. Neste caso, a covariância estimada deve ser considerada como uma contribuição adicional para a incerteza, transformando a expressão da incerteza combinada para a forma mostrada nas expressões (3.32) ou (3.33).

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \frac{\partial f(X)}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \quad (3.32)$$

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j) \quad (3.33)$$

Nestas expressões  $x_i$  e  $x_j$  são as estimativas das entradas dependentes,  $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$  é a covariância estimada, entre as variáveis cuja dependência é observada e  $r$  é o coeficiente de correlação entre essas variáveis.

Os documentos existentes sobre expressão de incerteza não esclarecem suficientemente sobre a correlação motivando-nos a apresentar sucintamente tal discussão no capítulo 5 deste trabalho.

### 3.3.4 - Incerteza Expandida

Em alguns casos, o valor da incerteza padrão combinada  $u_c$  basta para caracterizar a dispersão dos valores que razoavelmente poderiam ser atribuídas ao mensurando. De fato, isto é verificado em vários certificados de calibração.

Porém, na maioria das aplicações industriais, comerciais, aplicações relacionadas com a saúde, com a segurança, etc., é requerido que a incerteza seja expressa como a extensão deste valor de  $u_c$  num intervalo, dentro do qual seja razoável supor com uma dada confiança, que os infinitos valores do mensurando estejam nele contidos. A expressão (3.34) a seguir ilustra o conceito.

$$Rm = Vm \pm U \quad (3.34)$$

A metade do intervalo  $\pm U$  é denominada incerteza expandida  $U$ , sendo obtida pela multiplicação da incerteza padrão combinada por um fator de abrangência  $k$ . A expressão a seguir ilustra o procedimento.

$$U = k \cdot u_c \quad (3.35)$$

Este número adimensional,  $k$  é eleito de acordo com o nível de confiança requerido e com a distribuição de probabilidade em questão. Em inúmeros casos práticos ele está entre 2 e 3, correspondendo a confianças aproximadas de 95% e 99%.

Cabe observar que se a incerteza padrão avaliada pelo método tipo A for da mesma ordem de grandeza que as do tipo B, a incerteza expandida calculada da forma citada acima pode ser subestimada, a menos que um grande número de medições tenha sido feito. Neste caso deverá ser obtido um fator de abrangência

( $k$ ) a partir da “Distribuição – t”, baseado no número efetivo de graus de liberdade ( $\nu_{eff}$ ) da incerteza padrão combinada.

### 3.3.5 - Fator de Abrangência e Graus de Liberdade

Na expressão da incerteza, é recomendado a utilização do fator de abrangência de  $k = 2$  para calcular uma incerteza expandida partindo-se da hipótese que a distribuição Normal modela adequadamente os dados. Esse valor de  $k$  associará um nível de confiança de aproximadamente 95% ao resultado obtido. Porém, se a contribuição aleatória para a incerteza é relativamente grande quando comparada com outras contribuições, e se o número de leituras repetidas utilizadas é pequeno, há uma possibilidade de que a distribuição de probabilidade não seja Normal e assim o valor de  $k = 2$  associará um nível de confiança menor que o esperado de 95%. Nessas circunstâncias um valor do fator de abrangência que mantenha o nível de confiança em aproximadamente 95% deve ser obtido.

Neste caso, o valor de  $k$ , ou mais estritamente  $k_p$ , onde  $p$  é a confiança em termos de porcentagem, deve ser baseado numa distribuição  $t$  - student em lugar de uma distribuição Normal. Este valor de  $k_p$  resultará numa incerteza expandida  $U_p$ , cujo nível de confiança se aproxima do requerido nível  $p$ .

Para obter o valor de  $k_p$  é necessário obter uma estimativa dos graus de liberdade efetivos  $\nu_{eff}$  e da incerteza padrão combinada  $u_c(y)$ . Nesse caso, é recomendado que seja usada a equação de Welch-Satterthwaite (ABNT/INMETRO, 1998) para calcular o valor para  $\nu_{eff}$ , baseado nos graus de liberdade  $\nu_i$  das contribuições individuais de incerteza  $u_i(y)$ . Deste modo os graus de liberdade efetivos são dados pela expressão a seguir.

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \quad (3.36)$$

Para as contribuições obtidas de avaliação do tipo A, o grau de liberdade a ser usado é  $n - 1$  onde  $n$  é o tamanho amostral. Para as contribuições do tipo B os graus de liberdade devem ser estimados das informações disponíveis ou sobre a



confiabilidade da estimação da incerteza padrão. O Guia (ABNT/INMETRO, 1998) recomenda que os graus de liberdade para as contribuições do tipo B sejam obtidas da incerteza relativa mostrada a seguir.

$$v_i = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta u_i(y)}{u_i(y)} \right]^{-2} \quad (3.37)$$

Neste processo o valor para a incerteza relativa é obtido subjetivamente, de um julgamento científico, baseado numa porção de informação disponível.

Freqüentemente é possível usar o número de graus de liberdade de uma contribuição do tipo B como infinito ( $\infty$ ). Nestes casos, os graus de liberdade efetivos de  $u_c(y)$  dependerão somente dos graus de liberdade das contribuições do tipo A e da sua proporção em relação às contribuições do tipo B.

Tendo-se obtido um valor para  $v_{eff}$  a tabela de distribuição t-student deve ser usada para determinar o valor de  $t_p(v)$ . A tabela 3.4 dá alguns valores para  $t_{95}(v)$ , que são apropriados para um nível de confiança de 95%. O anexo 2 traz outros valores de  $t_p(v)$ .

Tabela 3.4 - Valores de  $v_{eff}$  para um nível de confiança aproximado de 95%

$v_{eff}$	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	14	16
$t_{95}(v)$	13,97	4,53	3,31	2,87	2,65	2,52	2,43	2,37	2,28	2,23	2,20	2,17
$v_{eff}$	18	20	25	30	35	40	45	50	60	80	100	$\infty$
$t_{95}(v)$	2,15	2,13	2,11	2,09	2,07	2,06	2,06	2,05	2,04	2,03	2,02	2,00

É comum que o valor de  $v_{eff}$  não seja inteiro e portanto seja necessário executar a interpolação entre os valores tabelados. A interpolação linear é geralmente suficiente quando  $v_{eff} > 3$ . Caso contrário, recomenda-se o uso do valor mais próximo, imediatamente mais baixo.

O valor obtido para  $t_{95}(v)$  é o valor de  $k_{95}$  requerido para calcular a incerteza expandida,  $U_{95}$  de:

$$U_{95} = k_{95} u_c(y) \quad (3.38)$$

Num critério utilizado (NAMAS, 1995) consta que se uma avaliação de incerteza envolver somente avaliações tipo A e o número de leituras  $n$ , for maior que 2, além da incerteza padrão tipo A ser menor que a metade da incerteza padrão combinada, não há necessidade da obtenção de um valor para o fator de abrangência. Este critério é baseado na conclusão que se  $s(\bar{x})/u_c(y) < 0,5$  e  $n > 2$  todas as outras contribuições são assumidas ter infinitos graus de liberdade. Disso,  $\nu_{eff} \geq 30$ , dando um valor para  $k_p$  de aproximadamente 2,09, que pode ser aproximado por  $k = 2$ .

### 3.3.6 - Apresentação dos Resultados

O último passo na expressão da incerteza de medição é a apresentação dos resultados. Após ela ter sido calculada para um nível mínimo de confiança de 95%, o valor do mensurando e a incerteza expandida devem ser informadas na forma  $y \pm U$  e acompanhada pela seguinte declaração típica de confiança:

*"A incerteza fornecida é baseada na incerteza padrão multiplicada por um fator de abrangência  $k = 2$ , fornecendo um nível de confiança de aproximadamente 95%."*

As incertezas são usualmente expressas em termos bilaterais ( $\pm$ ) ou em unidades do mensurando ou como valor relativo. Por exemplo como uma porcentagem, partes por milhão (ppm),  $1 \times 10^x$ , etc.

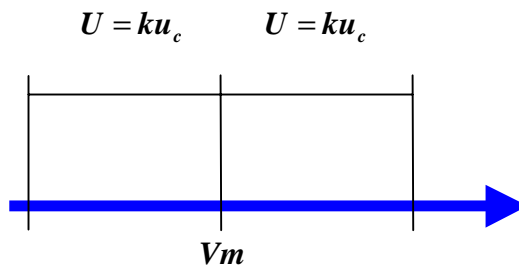
O número de algarismos em uma incerteza deve sempre refletir a capacidade prática da medição. Pelo processo na estimação de incerteza, é difícil justificar o uso de mais que dois algarismos significativos para informar a incerteza.

As incertezas devem normalmente ser arredondadas até o número apropriado de algarismos, podendo ser truncadas quando o processo não reduz significativamente a confiança no resultado de medição.

Deve também ser fornecido o nível de confiança com que a incerteza foi determinada que é tipicamente 95% ( $k = 2$ ) e 99% ( $k = 3$ ). Na maioria das vezes usa-se  $k = 2$  e excepcionalmente  $k = 3$  para aplicações críticas.

Desta forma, o resultado fica

$$Rm = Vm \pm U \quad (\text{unidade}) \quad (3.39)$$



Onde:

$Rm$  é o Resultado de medição

$Vm$  é o Valor medido (Corrigido)

$U$  é a Incerteza Expandida

$u_c$  é a Incerteza Padrão Combinada

$k$  é o Fator de Abrangência

Mesmo com todos os detalhes do tratamento apresentado, a informação contida em um resultado de medição pode ser colocada em dúvida, tornando-se necessário uma verificação detalhada ou até uma revisão nos cálculos de incerteza. Por isso, é necessário que num relatório de medição seja fornecido também as seguintes informações (ABNT/INMETRO, 1998):

- a - Os métodos pelos quais foram calculados os resultados parciais e finais a partir das observações experimentais;
- b - Os detalhes e explicações sobre todos os passos importantes;
- c - Os valores de constantes e outros dados de entrada obtidos de fontes externas;
- d - A origem destes valores e dados;
- e - O modelo  $y = f(X)$  ou algoritmo de cálculo;
- f - As correções e os estimadores das variáveis  $x_i$  por efeitos sistemáticos;
- g - Os estimadores  $x_i$  corrigidos;
- h - As incertezas padrão dos estimadores corrigidos;
- i - Os graus de liberdade para as incertezas;
- j - Os coeficientes de sensibilidade, particularmente aqueles determinados experimentalmente;

k - As incertezas mútuas ou os coeficientes de correlação;

l - Uma descrição completa pela qual todos os valores foram obtidos, incluindo aqueles que não foram diretamente medidos e,

m - Todas as fontes de informações empregadas.

Dependendo do uso dado à informação, o resultado de uma medição pode ser informado de diferentes maneiras. Apesar disso, são três os elementos fundamentais básicos a informar: o valor do estimador do mensurando; o valor da incerteza associada aos estimadores, sempre incluindo a unidade correspondente, e os correspondentes graus de liberdade. As incertezas podem ser expressas tanto como incertezas padrão combinadas ou como incertezas expandidas. Para a incerteza expandida, a informação deve conter também o fator de abrangência e o correspondente nível de confiança.

Como exemplo, suponhamos que um padrão de massa  $m$  de valor nominal de 100 g. tenha sido calibrado. O resultado de calibração pode ser elaborado de várias maneiras, a saber (ABNT/INMETRO, 1998):

1. “ $m = 100,021\ 47$  g com uma incerteza padrão combinada igual a 0,35 mg.”
2. “ $m = 100,021\ 47\ (35)$  g, onde os dígitos em parênteses representam o valor numérico da incerteza padrão combinada, referida aos dois últimos dígitos do valor citado”.
3. “ $m = 100,021\ 47\ (0,000\ 35)$  g, onde o número entre parênteses representa o valor numérico da incerteza padrão combinada.”
4. “ $m = (100,021\ 47 \pm 0,000\ 35)$  g, onde o valor que acompanha o símbolo  $\pm$  é a incerteza padrão combinada”.
5. “ $m = (100,021\ 47 \pm 0,00079)$  g, onde o valor que acompanha o símbolo  $\pm$  é o valor numérico da incerteza expandida  $U = k u_c$ , sendo  $u_c = 0,35$  mg a incerteza padrão combinada e  $k = 2,26$  o fator de abrangência. A incerteza expandida deste caso define um intervalo cujo nível de confiança é estimado igual a 95%, baseado na distribuição de Student com  $\nu = 9$  graus de liberdade.”

Também pode ser conveniente incluir adicionalmente uma expressão da incerteza em termos relativos, na forma  $u_c(y)/|y|$  ou  $U(y)/|y|$  (quando  $y \neq 0$ ).

Analisando os casos acima, os quatro primeiros casos tem incerteza padrão de  $3,5 \times 10^{-6}$ , enquanto que o quinto caso tem incerteza expandida de  $7,9 \times 10^{-6}$ .

Além disso pode ser notado que quando o símbolo  $\pm$  precede a incerteza padrão combinada  $u$  (caso 4) corre-se o risco de confundir esta incerteza com uma incerteza expandida  $U$ , cujo fator de abrangência seja  $k=1$ , significando com isso um nível de confiança de aproximadamente igual a 68% obtido da distribuição Normal.

Por isso, quando se informa a incerteza é preferível utilizar o caso 5 pois o mesmo informa claramente quanto é o valor da incerteza bem como o fator de abrangência.

### 3.3.7 - Uso de algarismos significativos

Como já citado, o número de algarismos significativos apropriado ao valor numérico de um estimador está relacionado com a quantidade de algarismos significativos da sua incerteza. Para seu uso adequado devem ser observadas as seguintes orientações (Vuolo, 1996)

1 - O resultado de uma medição obtida com um instrumento não deve ser dada com mais de um algarismo significativo adicional ao que o instrumento permite ler. Por exemplo, para um micrômetro graduado em microns, o resultado  $y=63,44 \mu\text{m}$  não é um resultado apropriado. O ideal seria  $y=63 \mu\text{m}$ .

2 - O último algarismo significativo do estimador de um mensurando não deve ser inferior ao último algarismo significativo da incerteza. Por exemplo, o resultado  $y=63,4 \mu\text{m}$  com  $u_c(y)=2 \mu\text{m}$  não seria apropriado. O apropriado seria  $y=63 \mu\text{m}$ .

3 - A incerteza não deve ser dada com mais de dois algarismos significativos, arredondando-se a segunda casa para cima. Por exemplo,  $u_c(y)=1,83 \mu\text{m}$  será informado como  $u_c(y)=1,9 \mu\text{m}$ .

4 - Se o resultado da incerteza é menor que o último algarismo significativo do mensurando, o mesmo deverá ser arredondado até este dígito. Por exemplo, se  $y=63,4 \mu\text{m}$  com  $u_c(y)=0,02 \mu\text{m}$  a incerteza deverá ser informada na forma  $u_c(y) < 0,1 \mu\text{m}$ .

5 - Para os coeficientes de correlação convém usar três algarismos significativos, especialmente se seus valores são próximos da unidade.

Embora estes critérios devam ser utilizados na apresentação final dos resultados, convém que todos os dígitos sejam mantidos para evitar erros de arredondamento em fases intermediárias do processo.

## Capítulo 4

### 4 – TRABALHO PROPOSTO

Das discussões apresentadas nos capítulos precedentes é possível perceber que os documentos existentes sobre a declaração da incerteza têm sido amplamente divulgados e aceitos, tanto na comunidade metrológica nacional quanto na internacional. Entretanto, uma análise mais cuidadosa das orientações trazidas nesses documentos permite observar que os mesmos trazem conceitos que não são elementares. Embora não elementares, esses conceitos não são explicados com detalhes suficientes que permitam ao usuário do ambiente fabril trabalhar tranqüilamente com os conceitos da incerteza das medições.

Esse fato gera uma situação interessante no ambiente fabril, fazendo com que a incerteza de medição, quando avaliada e utilizada, seja expressa de forma bastante rudimentar, muitas vezes incorrendo-se em falhas conceituais que por vezes comprometem a análise do resultado. Apenas como exemplo ilustrativo, não é incomum se encontrar a incerteza do mensurando expressa pela soma algébrica da repetitividade dos resultados com a incerteza declarada do padrão.

Considerando que a finalidade primeira do Guia para expressão da incerteza de medição é estabelecer regras gerais para que se possa avaliar e expressar a incerteza de medição, nos vários níveis de exatidão e em diferentes campos de aplicação, desde o "chão de fábrica" até a pesquisa fundamental (ABNT/INMETRO, 1998), estabelece-se como objetivo geral deste trabalho o esclarecimento de alguns dos principais aspectos relacionados à expressão da incerteza de medição, tal que

seja possível sua compreensão mais clara por diferentes profissionais, particularmente aqueles do “chão de fábrica” ligados à metrologia, até aqueles envolvidos com a calibração de equipamentos e instrumentos de medição.

Vale observar que profissionais graduados, tipicamente envolvidos com questões teóricas, têm a discussão trazida pelo Guia mais presente em outras atividades, fazendo com que muitos elementos desse documento sejam conhecidos ou de fácil entendimento. Essa situação não é comum no "chão de fábrica" onde os problemas teóricos não são freqüentes no cotidiano das atividades, fazendo com que a abordagem do Guia seja muito trabalhosa na interpretação, chegando algumas vezes a ser estranha na aplicação diária.

Deste cenário estabelece-se como objetivos específicos deste trabalho a discussão pormenorizada de alguns pontos relevantes apresentados nos capítulos anteriores. Particularmente, a discussão dos capítulos a seguir estará centrada nos seguintes pontos:

- Relacionamento das Incertezas tipos A e B com erros aleatórios e sistemáticos.
- Demonstração da determinação das variâncias para os diferentes tipos de distribuição
- Interpretação pormenorizada da expressão da incerteza padrão combinada;
- Conceituação e exemplificação de grandezas correlacionadas e não correlacionadas;

Este trabalho visa também discutir um procedimento simplificado de cálculo de incerteza a ser utilizado em um ambiente industrial, dentro do qual alguns aspectos teóricos formais sejam examinados e atenuados frente aos valores comuns da incerteza avaliada. Esta proposta vem ao encontro da necessidade das indústrias de calcular a incerteza de uma forma mais simples e rápida, sem no entanto alterar a magnitude e significância dos valores obtidos. Vale ressaltar que, embora simplificado, o procedimento concorda com os conceitos fundamentais dos documentos normativos existentes, não trazendo portanto prejuízos aos resultados obtidos das incertezas.

Em síntese, este trabalho trás dois objetivos, geral e específico, o primeiro de esclarecer alguns aspectos importantes da expressão da incerteza, e o segundo de propor um procedimento simplificado do seu cálculo, dentro das limitações fabris verificadas no cotidiano da indústria. O detalhamento da proposta é apresentado nos capítulos apresentados a seguir.



## Capítulo 5

### **5 – DESENVOLVIMENTO DOS CONCEITOS RELATIVOS A INCERTEZA.**

Conforme visto nos capítulos 3 e 4, a expressão da incerteza de medição apresenta uma série de pontos que merecem um esclarecimento mais detalhado. Dada a complexidade do assunto, os esclarecimentos existentes nos documentos não são suficientes para alguns dos seus usuários, particularmente àqueles do ambiente industrial que, na maioria das vezes, não tem envolvimento diário com as questões teóricas necessárias para o tratamento da incerteza de medição.

Assim, conforme enunciado no capítulo anterior, um dos objetivos deste trabalho é discutir alguns pontos importantes do tratamento da incerteza, de modo a torná-los mais acessíveis no cotidiano do ambiente industrial. Isso será feito pela discussão das incertezas tipo A e tipo B, pela demonstração do cálculo das variâncias para diferentes distribuições, pela discussão dos coeficientes de sensibilidade que integram a expressão da incerteza padrão combinada e, finalmente, pela abordagem de grandezas correlacionadas e não-correlacionadas.

Feitas tais discussões, um procedimento simplificado para o cálculo da incerteza em ambiente industrial será apresentado. Cabe novamente enfatizar que o procedimento simplificado aqui proposto não tem por objetivo substituir os procedimentos detalhados trazidos pelos documentos normativos. Entende-se que tais recomendações devem ser aplicadas integralmente onde houverem bases teórico-práticas para a determinação integral e confiável de cada um dos seus componentes. Em função disso, a simplificação proposta visa dar indicativos de algumas simplificações possíveis para o cálculo da incerteza, particularmente na indústria onde o rigor do tratamento da incerteza não pode ser garantido com a

confiabilidade necessária em muitas tarefas diárias, justificando assim sua simplificação desde que esta não afete significativamente o resultado calculado, tanto em valor quanto em confiabilidade.

### **5.1 – As incertezas tipo A e B e os erros Aleatórios e Sistemáticos.**

Conforme visto no capítulo 3, os documentos normativos atuais definem essencialmente duas categorias de incertezas padrão que são agrupadas em função do seu método de avaliação, gerando as incertezas tipo A e tipo B.

Embora esses dois tipos de incerteza sejam amplamente divulgados por muitos documentos, ainda existe uma confusão muito grande entre eles, particularmente quando se tenta a analogia com incertezas aleatórias e sistemáticas.

Isso acontece, principalmente, devido às duas abordagens existentes da incerteza derivadas da teoria dos erros. Uma mais antiga e tradicional, chamada de abordagem ortodoxa, e outra mais recente chamada de abordagem aleatória. Segundo Couclough (1987), os termos incerteza aleatória e incerteza sistemática provém da chamada abordagem ortodoxa da teoria dos erros, que distingue o aleatório do sistemático pela natureza do efeito verificado no resultado da medição. Assim, aleatória é a parcela que se manifesta aleatoriamente, portanto passível de tratamento através de ferramentas estatísticas, e sistemático é oposto. Nessa abordagem a combinação da incerteza aleatória com a sistemática para obtenção de uma incerteza composta é desaconselhada, com exceção de situações particulares onde isso é exigido, nas quais cada um dos componentes bem como as regras utilizadas na combinação devem ser apresentadas.

Já a abordagem aleatória, que é mais recente que a ortodoxa, considera que a incerteza do resultado de uma medição possa conter componentes agrupáveis em duas categorias, diferenciadas pela maneira através da qual o valor numérico dos mesmos é estimado. As duas categorias são as incertezas do tipo A, que devem ser avaliadas por métodos estatísticos, e as incertezas do tipo B, avaliadas por outros métodos. Essa teoria estabelece também que as incertezas do tipo A devam ser caracterizadas por variâncias estimadas  $s_i^2$ , ou pelos desvios padrão estimados  $s_i$ , além dos graus de liberdade  $\nu_i$  quando apropriado, devendo ainda ser consideradas as covariâncias em função da dependência ou independência das variáveis envolvidas. A teoria aleatória estabelece ainda que as incertezas do tipo B devam

ser caracterizadas por outras grandezas tomadas como aproximações das variâncias correspondentes a estas variáveis.

Comparando as duas teorias, é possível notar que as diferenças mais significativas estão tanto na nomenclatura quanto na regra usada para combinar incertezas. No caso das regras ortodoxas não é aconselhada a obtenção de um parâmetro único para o resultado que envolva parcelas aleatórias e sistemáticas. Apesar disso, na expressão do resultado ela permite combinar suas diferentes componentes obtendo o que se denomina limite de erro. A figura 5.1 a seguir ilustra a discussão.

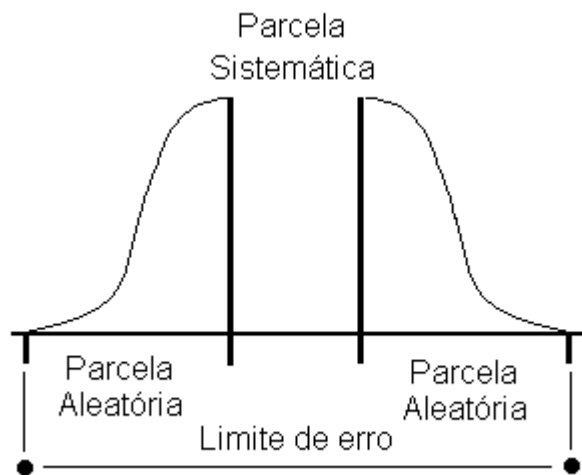


Figura 5.1 – Interpretação esquemática da abordagem ortodoxa.

Observa-se pela figura que nesta abordagem um limite máximo de erro é determinado sem entretanto misturar a natureza aleatória e sistemática das suas componentes. As parcelas sistemática e aleatória ficam contidas neste limite, sem no entanto existir qualquer distinção na sua localização dentro do limite. Matematicamente esta abordagem fica expressa pela soma algébrica das componentes limites dos erros, obtendo-se assim o limite de erro final dentro do qual o resultado é esperado, conforme ilustra a expressão 5.1 (Vuolo, 1996).

$$L_{ort} = L_{sist} + L_{ale} \quad (5.1)$$

Onde:

$L_{ort}$  é o limite de erro final pela abordagem ortodoxa,

$L_{sist}$  é o limite de erro sistemático,

$L_{ale}$  é o limite de erro aleatório,

Já a abordagem aleatória prevê que a combinação duas categorias de componentes possa ser agrupada para obtenção de um parâmetro global que represente a incerteza resultante, chamado de limite estatístico de erro (Vuolo, 1996). Pela caracterização de tipo A e tipo B para as suas componentes resulta variâncias  $\sigma_A^2$  e  $\sigma_B^2$  para as mesmas. Sua combinação pode se dar como indicado na expressão (5.2), chegando-se ao limite estatístico de erro final  $L_{ale}$  dado pela expressão (5.3), onde o desvio padrão da combinação das incertezas  $\sigma$  é multiplicado por 3 para que um limite de erro com confiança da ordem de 99% seja obtido.

$$\sigma^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 \quad (5.2)$$

$$L_{ale} = 3\sigma; \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (5.3)$$

Analisando a expressão 5.2, é fácil observar que avaliação de incerteza tipos A e B recomendada pelo BIPM é mais concordante com a chamada abordagem aleatória. Na verdade, segundo Mathiesen (1997), as dúvidas existentes são muito mais relacionadas com a terminologia do que com os conceitos envolvidos. Isso porque quando as expressões "avaliação tipo A" e "avaliação tipo B" foram escolhidas pelo grupo de trabalho do BIPM, não houve grande preocupação que o levasse a encontrar nomes mais apropriados que permitissem a distinção da nova abordagem com relação a abordagem aleatória, resultando nomes iguais para elementos não exatamente idênticos. Quando da tentativa do grupo para determinar novos nomes, os termos "avaliação tipo A e tipo B" estavam tão profundamente colocados que julgou-se inconveniente alterá-los. Disso decorre a lamentável prática atual que tende a assumir a categoria de incertezas tipo A como aquela de natureza aleatória, e tipo B como as de natureza sistemática.

Do exposto cabe indicar alguns pontos objetivos para simplificação do entendimento desses conceitos.

- as designações A e B para as componentes da incerteza foram usadas por duas abordagens, a aleatória como parte da teoria dos erros, e a abordagem atualmente recomendada pelo Guia.
- a abordagem aleatória define como limite de erro aleatório o valor de  $3\sigma$ , ao qual está associado um limite de confiança de 99%, sendo  $\sigma$  calculado

como a combinação de variâncias  $\sigma_A^2$  e  $\sigma_B^2$ . Este resultado coincide com a abordagem atual do Guia apenas quando os coeficientes de sensibilidade são unitários, a distribuição resultante possa ser assumida confiavelmente como Normal, e se esteja interessado exatamente no limite de confiança de 99% para o qual um fator de abrangência de aproximadamente 3 deva ser adotado.

- em decorrência das designações tipo A e tipo B, uma incerteza padrão obtida de uma avaliação tipo A, que envolva portanto métodos estatísticos, pode ser chamada de incerteza padrão tipo A. Uma incerteza padrão obtida de uma avaliação tipo B, sem envolver métodos estatísticos, pode ser chamada de incerteza padrão tipo B.
- pelas considerações acima, os termos incertezas tipo A e tipo B não devem ser confundidos com os conceitos de aleatório e sistemático, que se referem à natureza das influências verificadas nos resultados das medições. Faça-se claro também que não existem denominações úteis de Erros tipo A ou Erros tipo B para quaisquer das aplicações discutidas.
- Analogamente, os termos incerteza aleatória e incerteza sistemática não são recomendados porque os modificadores aleatório e sistemático são apropriados para a palavra erro, mas não o são para a palavra incerteza.

Finalmente, deve ser observado que incerteza tipo A e incerteza tipo B, referentes a expressão de incertezas conforme o Guia ou outros documentos normativos sobre incerteza da atualidade, não possuem ligação direta com a incerteza da teoria de erros ensinada em alguns cursos de graduação, que na maioria das vezes utilizam a abordagem ortodoxa para tratamento das suas práticas de laboratório.

## **5.2 – Determinação das médias e variâncias para as principais distribuições do tratamento das incertezas.**

Acredita-se que parte das dúvidas ou estranheza na aplicação dos conceitos de incerteza na indústria provém do fato dos envolvidos não dominarem com clareza a origem de alguns valores avaliados no processo. Entre eles, o cálculo das médias e das variâncias das distribuições chama atenção, tanto pela sua importância quanto

pela sua simplicidade de entendimento, julgando-se por isso oportuno demonstrar alguns conceitos a eles relacionados.

Conforme discutido, o uso da distribuição retangular é recomendado nos casos em que é possível apenas estimar os limites extremos da grandeza de entrada. Nestes casos, a hipótese básica é que esta grandeza é encontrada no intervalo  $(a_-, a_+)$  e não fora dele. Disso resulta a probabilidade igual a um de que o valor  $x_i$  esteja nesse intervalo e a probabilidade zero de estar fora dele. A figura 5.2 mostrada a seguir ilustra o conceito dessa distribuição.

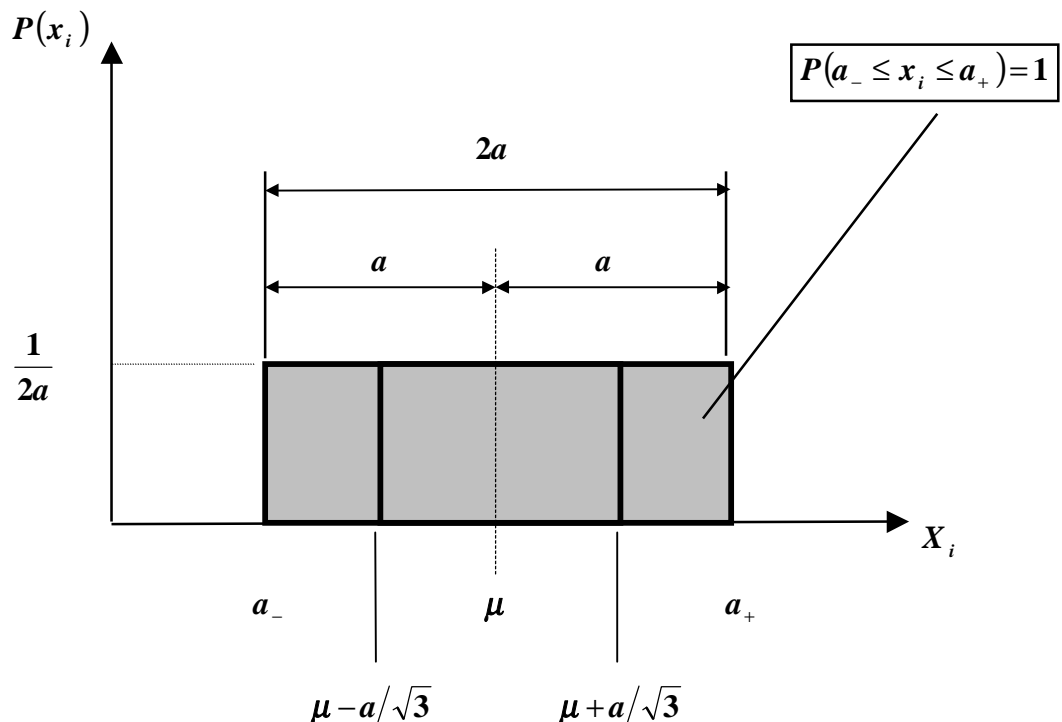


Figura 5.2 – Conceitos da distribuição retangular.

Analisando a figura surge a necessidade de entendimento da origem do ponto médio do intervalo  $(a_-, a_+)$  e da variância que estima a variabilidade da quantia modelada.

Para cálculo da média da distribuição toma-se inicialmente a definição de esperança matemática dada pela expressão (3.1), reproduzida na expressão (5.4) a seguir.

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (5.4)$$

Toma-se as expressões da distribuição retangular ou uniforme dada por.

$$f(x) = 0; \dots x < a_- \vee x > a_+ \quad (5.5)$$

$$f(x) = \frac{1}{2a}; \dots a_- \leq x \leq a_+ \quad (5.6)$$

Aplicando as expressões (5.5) e (5.6) na definição (5.4) pode-se escrever.

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{a_-} x f(x) dx + \int_{a_-}^{a_+} x f(x) dx + \int_{a_+}^{+\infty} x f(x) dx \quad (5.7)$$

Pela condição expressa por (5.5), o primeiro e terceiro termos da expressão (5.7) se anulam, permitindo que a média seja calculada por.

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{a_-}^{a_+} x f(x) dx = \frac{1}{2a} \int_{a_-}^{a_+} x dx \quad (5.8)$$

Resolvendo a integral e aplicando os limites do intervalo obtém-se.

$$\mu = E(X) = \frac{1}{2a} \int_{a_-}^{a_+} x dx = \frac{1}{2a} \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{a_-}^{a_+} \quad (5.9)$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{2a} \left( \frac{a_+^2}{2} - \frac{a_-^2}{2} \right) = \frac{(a_+ - a_-)(a_+ + a_-)}{4a} \quad (5.10)$$

Da figura (5.2) observa-se o valor da semi faixa do intervalo  $(a_-, a_+)$ , valendo então a relação dada abaixo.

$$(a_+ - a_-) = 2a \quad (5.11)$$

Substituindo a relação (5.11) na expressão (5.10), chega-se ao valor da média da distribuição uniforme ou retangular.

$$\mu = E(X) = \frac{(a_+ - a_-)(a_+ + a_-)}{4a} = \frac{2a(a_+ + a_-)}{4a} = \frac{(a_+ + a_-)}{2} \quad (5.12)$$

Portanto

$$\mu = \frac{(a_+ + a_-)}{2} \quad (5.13)$$

Procedendo de modo análogo para cálculo da variância, parte-se da sua definição mostrada na expressão (3.17), também duplicada na expressão (5.14).

$$u^2(x) = \text{Var}(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (5.14)$$

Da expressão (5.14) o termo  $[E(x)]^2$  se refere ao quadrado da média já calculada, sendo portanto utilizada somente no final do processo. Cabe então o cálculo do primeiro termo dado pela expressão a seguir.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \quad (5.15)$$

Pelas considerações já feitas acerca dos limites de integração nas expressões (5.7) e (5.8) pode-se escrever.

$$E(X^2) = \frac{1}{2a} \int_{a_-}^{a_+} x^2 dx = \frac{1}{2a} \left( \frac{x^3}{3} \right)_{a_-}^{a_+} \quad (5.16)$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2a} \left( \frac{a_+^3}{3} - \frac{a_-^3}{3} \right) = \frac{1}{3 \cdot 2a} (a_+^3 - a_-^3) \quad (5.17)$$

Tomando a expansão da diferença de cubos mostrada a seguir e a relação dada em (5.11) pode-se escrever.

$$(a_+^3 - a_-^3) = (a_+ - a_-)(a_+^2 + a_+a_- + a_-^2) \quad (5.18)$$

Donde

$$E(X^2) = \frac{1}{3 \cdot 2a} (a_+^3 - a_-^3) = \frac{2a (a_+^2 + a_+a_- + a_-^2)}{3 \cdot 2a} = \frac{(a_+^2 + a_+a_- + a_-^2)}{3} \quad (5.19)$$

Retomando a expressão (5.14) torna-se possível escrever.

$$u^2(x) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(a_+^2 + a_+a_- + a_-^2)}{3} - \frac{(a_+ + a_-)^2}{4} \quad (5.20)$$



Desenvolvendo a expressão acima chega-se a.

$$u^2(x) = \frac{4a_+^2 + 4a_+a_- + 4a_-^2 - 3a_+^2 - 6a_+a_- - 3a_-^2}{12} \quad (5.21)$$

$$u^2(x) = \frac{a_+^2 - 2a_+a_- + a_-^2}{12} = \frac{(a_+ - a_-)^2}{12} \quad (5.22)$$

Como dado pela expressão (5.11) e ilustrado na figura 5.3, a diferença entre os limites ( $a_+ - a_-$ ) vale  $2a$  resultando a expressão da variância da distribuição uniforme na forma.

$$u^2(x) = \frac{a^2}{3} \quad (5.23)$$

A outra distribuição de interesse no cálculo de incertezas é a distribuição trapezoidal ilustrada na figura 5.3.

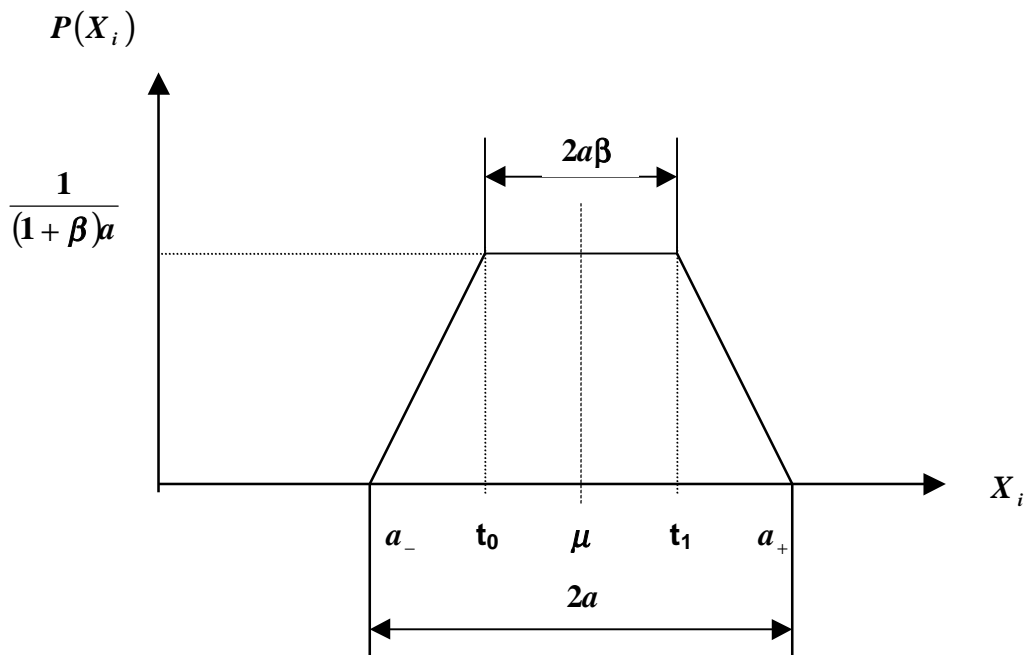


Figura 5.3 – Conceitos da distribuição trapezoidal.

Nesse caso, analogamente ao executado para a distribuição retangular, toma-se as expressões da esperança e variância, dadas pelas equações (5.4) e (5.14), e deduz-se as citadas quantias pelo mesmo procedimento. O único aspecto que merece destaque é a divisão das integrais em subintervalos de integração, já que a distribuição trapezoidal precisa de mais de uma relação funcional para sua definição

no intervalo  $(a_- , a_+)$ . Para tal, toma-se inicialmente as expressões que definem a distribuição conforme mostradas a seguir.

$$f_1(x) = 0; \dots x < a_- \vee x > a_+ \quad (5.24)$$

$$f_2(x) = \frac{(x - a_-)}{a(1 + \beta)(t_0 - a_-)}; \dots a_- \leq x < t_0 \quad (5.25)$$

$$f_3(x) = \frac{1}{(1 + \beta)a}; \dots t_0 \leq x < t_1 \quad (5.26)$$

$$f_4(x) = \frac{(x - a_+)}{a(1 + \beta)(t_1 - a_+)}; \dots t_1 \leq x \leq a_+ \quad (5.27)$$

A partir de tais definições toma-se a expressão da média dada por (5.4), expandindo-a nos diferentes intervalos de integração conforme mostrado a seguir.

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{a_-} x f_1(x) dx + \int_{a_-}^{t_0} x f_2(x) dx + \int_{t_0}^{t_1} x f_3(x) dx + \int_{t_1}^{a_+} x f_4(x) dx + \int_{a_+}^{+\infty} x f_1(x) dx \quad (5.28)$$

Desenvolvendo tais expressões conforme já indicado, determina-se a média da distribuição trapezoidal na forma.

$$\mu = \frac{(a_- + a_+)}{2} \quad (5.29)$$

Por um procedimento também análogo ao anteriormente desenvolvido através da expressão da variância dada por (5.14) , com as integrais desenvolvidas como dado em (5.15), nos intervalos definidos pelas expressões (5.24) a (5.27), pode-se escrever a variância da distribuição trapezoidal na forma dada pela expressão (5.30).

$$u^2(x) = \frac{a^2(1 + \beta^2)}{6} \quad (5.30)$$

A última distribuição que merece destaque é a triangular, cuja utilização é orientada quando se tem evidências de que a variável modelada ocorre preferencialmente no centro do intervalo  $(a_-, a_+)$ , sem no entanto existirem evidências convincentes de que outro modelo de distribuição é mais adequado, como o modelo Normal por exemplo. A figura 5.4 ilustra esquematicamente a distribuição.

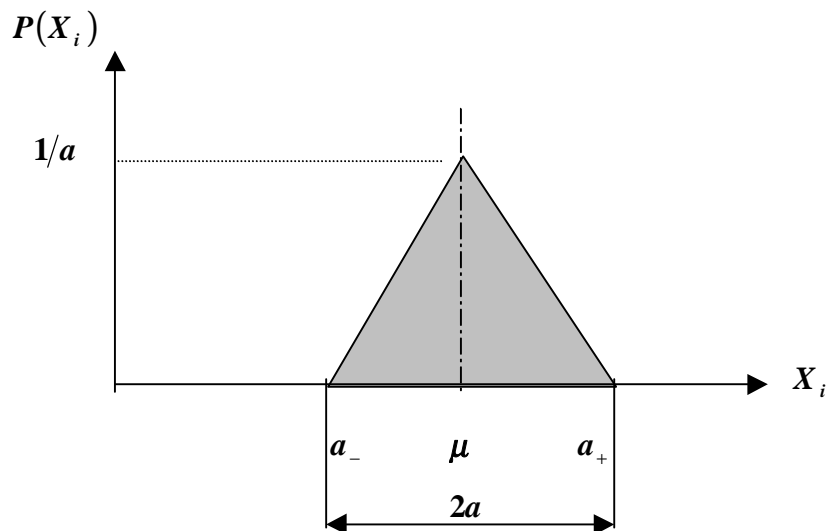


Figura 5.4 – Conceito da distribuição triangular.

Procedimentos absolutamente idênticos podem ser desenvolvidos para a demonstração do cálculo dos valores da média e variância desta distribuição. Entretanto, é simples observar que a distribuição triangular é um caso particular da trapezoidal, obtido quando  $\beta \rightarrow 0$ , podendo seus parâmetros de interesse ser deduzidos diretamente das expressões (5.29) e (5.30) conforme mostrados nas expressões (5.31) e (5.32) mostradas a seguir.

$$\mu = \frac{(a_- + a_+)}{2} \quad (5.31)$$

$$u^2(x) = \frac{a^2(1 + \beta^2)}{6} = \frac{a^2(1 + 0^2)}{6} = \frac{a^2}{6} \quad (5.32)$$

### 5.3 – Os coeficientes de sensibilidade da expressão da incerteza padrão combinada.

Conforme visto no capítulo 3, as expressões de incerteza padrão combinada (3.30) e (3.32) apresentam a derivada parcial  $\partial f(X)/\partial x_i$ , também referida por  $c_i$ , como multiplicador da incerteza padrão  $u(x_i)$ . Foi visto também pela expressão (3.31), reproduzida abaixo na expressão (5.33), que  $c_i$  é o coeficiente de sensibilidade associado ao valor da grandeza de entrada  $x_i$ , calculado pela derivada parcial da função  $f(X)$  com respeito a grandeza de entrada  $x_i$  (Kessel W.,1996).

$$c_i = \left. \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} \right|_{x_i = x_1, x_2, \dots} \quad (5.33)$$

Sob o enfoque matemático, no domínio bidimensional, se o modelo  $y = f(x)$  é considerado, o coeficiente de sensibilidade  $c_i$  representa o valor da relação entre a variação da saída  $y$  mediante a variação de  $x$ , conforme representado na figura 5.5, abaixo.

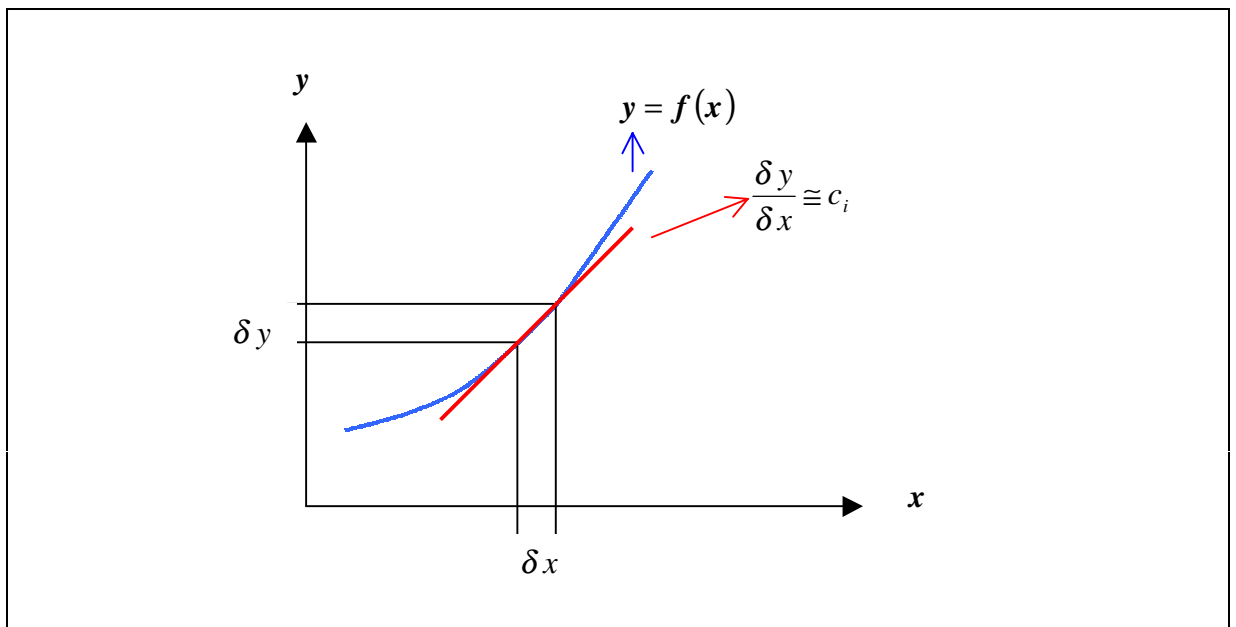


Figura 5.5 - Representação gráfica do coeficiente de sensibilidade

Dessa forma, na equação (5.33),  $c_i$  descreve os limites nos quais o valor de saída  $y$  é influenciado pelas variações do valor de entrada  $x_i$ .

Conforme representado na figura 5.5, uma variação de  $x$  dada por  $\delta x$  provoca uma variação  $\delta y$  de acordo com a relação funcional  $y = f(x)$ , existente entre  $x$  e  $y$ . Ilustrado de outro modo para este caso, se uma variável  $y$  depende de  $x$  o valor resultante aproximado da relação  $\delta y / \delta x$  é o coeficiente angular da reta tangente à função no ponto  $x$ , cujo valor coincide com o coeficiente de sensibilidade  $c_i$  em questão. Assim, um coeficiente angular unitário é obtido quando  $\delta x$  e  $\delta y$  são idênticos, representando uma contribuição cujo coeficiente de sensibilidade para o cálculo da incerteza padrão combinada iguala-se a unidade.

Tomando um exemplo prático simplificado onde um comprimento medido  $l$  é função apenas do comprimento do padrão  $l_p$  e da diferença medida  $d$ , desconsiderados todos os demais efeitos como temperatura, expansão térmica, etc., a relação funcional entre as variáveis de entrada e de saída é  $l = f(l_p, d)$  e pode ser escrita na forma dada pela expressão (5.34) mostrada a seguir.

$$l = f(l_p, d) = l_p + d \quad (5.34)$$

onde:

$l$  é o comprimento medido

$l_p$  é o comprimento do padrão

$d$  é a diferença entre  $l_p$  e  $l$

Nestas circunstâncias, a expressão da incerteza padrão combinada é dada pela expressão (5.35).

$$u_c(l) = \sqrt{\left(\frac{\partial f(l_p, d)}{\partial l_p}\right)^2 u^2(l_p) + \left(\frac{\partial f(l_p, d)}{\partial d}\right)^2 u^2(d)} \quad (5.35)$$

Cujos coeficientes de sensibilidade, definidos pela derivadas parciais, são:

$$\frac{\partial f(l_p, d)}{\partial l_p} = \frac{\partial l}{\partial l_p} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f(l_p, d)}{\partial d} = \frac{\partial l}{\partial d} = 1 \quad (5.36)$$

Da expressão (5.36) escreve-se expressão da incerteza padrão combinada conforme indicada em (5.37), enfatizando-se o fato das duas variáveis consideradas contribuir em igual proporção para a incerteza  $u_c(l)$ , já que os coeficientes de sensibilidade são idênticos.

$$u_c(l) = \sqrt{u^2(l_p) + u^2(d)} \quad (5.37)$$

Do mesmo resultado conclui-se que a saída  $l = f(l_p, d)$  varia em igual magnitude das entradas  $l_p$  e  $d$ , uma vez que os dois coeficientes de sensibilidade são unitários.

Tomando o exemplo anterior, porém considerando também os efeitos da temperatura e da expansão térmica dos materiais envolvidos, pode-se escrever uma expressão mais completa para determinação do comprimento  $l$  em função de todas as variáveis de influência. Desconsiderando a forma exata da relação funcional para esse caso, pode-se pensar na sua forma genérica dada pela expressão (5.38) (ABNT/INMETRO, 1998)

$$l = f(X) = f(l_p, d, \alpha_p, \theta, \delta\alpha, \delta\theta) \quad (5.38)$$

onde:

$l, l_p$  e  $d$  têm os significados já discutidos

$\alpha_p$  é o coeficiente de expansão do padrão

$\theta$  é a temperatura de referência do padrão

$\delta\alpha$  é a incerteza associada ao coeficiente de expansão térmica do padrão

$\delta\theta$  é a variação da temperatura em relação a referência

De modo análogo ao anterior, os coeficientes de sensibilidade calculados pelas derivadas parciais assumem os seguintes valores.

$$\frac{\partial f(X)}{\partial l_p} = 1 - (\delta\alpha\theta + \alpha_p\delta\theta) \quad (5.39)$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial d} = 1 \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial \alpha_p} = -l_p\delta\theta \quad (5.41)$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial \theta} = -l_p \delta \alpha \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial \delta \alpha} = -l_p \theta \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial \delta \theta} = -l_p \alpha_p \quad (5.44)$$

Destes resultados a expressão da incerteza padrão combinada resulta em (ABNT/INMETRO)

$$u_c(l) = \sqrt{u^2(l_p) + u^2(d) + l_p^2 \theta^2 u^2(\delta \alpha) + l_p^2 \alpha_p^2 u^2(\delta \theta)} \quad (5.45)$$

Analisando a expressão (5.45) o primeiro aspecto a ser considerado é que apenas dois coeficientes de sensibilidade resultam com valor unitário. Mais importante que este fato é a comparação dos diferentes coeficientes, indicando a relação de proporcionalidade com que os mesmos interferem no resultado final da incerteza padrão combinada. É importante entretanto observar que, pela homogeneidade dimensional exigida para a equação (5.35), não são os coeficientes  $c_i$  que devem ser comparados diretamente uns com os outros mas, ao invés disso, o produto desses coeficientes com as respectivas incertezas, conforme definido pela expressão (3.30).

#### **5.4 - A propagação de incertezas originadas de diferentes modelos de probabilidade**

Conforme enunciado nos documentos normativos do tratamento da incerteza e discutido anteriormente, a incerteza padrão combinada é obtida pela raiz quadrada da combinação linear das variâncias. Esta orientação é ilustrativamente mostrada na expressão a seguir.

$$u_c(y) = \sqrt{[NORMAL]^2 + [RETANGULAR]^2 + [TRIANGULAR]^2}$$

O aspecto relevante a ser esclarecido é relativo ao significado da incerteza estimada por  $u_c(y)$ , uma vez que a mesma é obtida a partir de informações provenientes de diferentes distribuições de probabilidade. A explicação mais imediata da questão, trazida também no Guia (ABNT/INMETRO,1998), é fundamentada no teorema central do limite que estabelece que, nas condições propostas, a distribuição resultante de  $Y$  é Normal mesmo que cada uma de suas componentes definitivamente não o sejam, isto é, sejam retangulares, trapezoidais, triangulares, etc. Esta aproximação de  $u_c(y)$  pela Normal será tanto melhor quanto maior for o número de variáveis que entrem na composição de  $u_c(y)$ , quanto mais próximos uns dos outros forem os valores das contribuições  $u(x_i)$  ou quanto mais próximas da Normal forem cada uma de suas componentes.

Uma outra questão mais elaborada, que surge da mesma expressão de  $u_c(y)$ , cuja resposta não é necessariamente trivial, é relativa à faixa de probabilidade delimitada por  $u_c(y)$ . A tabela 5.1 ilustra o problema.

Tabela 5.1 - Nível de confiança /distribuição

Distribuição	Nível de confiança para $k_p = 1$
Normal	68,27%
Retangular	57,74%
Triangular	24,45%

Conforme ilustra a tabela se diferentes distribuições entrarem na composição de  $u_c(y)$  a partir dos  $u(x_i)$  individuais, diferentes intervalos de confiança estarão sendo delimitados, não ficando explícito qual o intervalo de confiança resultante, associado a  $u_c(y)$ . O teorema central do limite enuncia a partir das suas hipóteses que a distribuição será Normal e, supostamente,  $u_c(y)$  será um desvio padrão da distribuição resultante. Entretanto, este aspecto do cálculo da incerteza não é claramente colocado nos documentos normativos, sendo por isso merecedor de maior atenção em futuros trabalhos.



## 5.5 - Grandezas correlacionadas e não correlacionadas

O último ponto que merece destaque é relativo aos conceitos de grandezas correlacionadas, ou dependentes, e não correlacionadas, ou independentes.

Determinar se as grandezas presentes numa medição são estatisticamente independentes (não correlacionadas) ou estatisticamente dependentes (correlacionadas) é importante para a escolha da expressão de incerteza padrão combinada que deve ser utilizada no cálculo de incerteza. Conforme já discutido, nas situações onde todas as grandezas de entrada são independentes, deve-se utilizar a expressão (3.30) e nas situações onde uma ou mais grandezas de entrada forem correlacionada deve ser utilizada a expressão (3.32). A dúvida que surge então é sobre a forma usada para determinar se as grandezas de entrada são ou não correlacionadas.

Teoricamente o que define se as grandezas são não-correlacionadas ou correlacionadas é o chamado coeficiente de correlação. Grandezas não correlacionadas exibem coeficiente de correlação nulo, enquanto que seu valor varia entre -1 e +1 para grandezas correlacionadas. Assim, se duas variáveis exibem coeficiente de correlação cujo valor é +1, significa dizer que tratam-se de variáveis positivamente correlacionadas, significando que quando uma aumenta seu valor a outra também o faz. No caso oposto, verificado quando seu valor é -1, ocorre o inverso com relação ao comportamento das variáveis.

O coeficiente de correlação é portanto uma medida da dependência mútua e relativa de duas variáveis, definida pela razão entre suas covariâncias e a raiz quadrada positiva do produto de suas variâncias (ABNT/INMETRO, 1998). Dessa forma dada na expressão (5.46)

$$\rho(y, z) = \rho(z, y) = \frac{v(y, z)}{\sqrt{v(y, y)v(z, z)}} = \frac{v(y, z)}{\sigma(y)\sigma(z)} \quad (5.46)$$

que estima

$$r(y_i, z_i) = r(z_i, y_i) = \frac{s(y_i, z_i)}{\sqrt{s(y_i, y_i)s(z_i, z_i)}} = \frac{s(y_i, z_i)}{s(y_i)s(z_i)} \quad (5.47)$$

Retomando a definição do coeficiente de correlação, pode-se agora identificá-lo formalmente como um número puro, definido no intervalo  $-1 \leq \rho \leq +1$  ou  $-1 \leq r(y_i, z_i) \leq +1$ .

**Uma outra forma de se escrever as expressões (5.46) e (5.47) é apresentada por Kume (1993) como uma alternativa simbólica para facilitar a sua compreensão quando apenas duas variáveis estão envolvidas. Tal forma alternativa é mostrada em (5.48).**

$$r = \frac{S(xy)}{\sqrt{S(xx) \cdot S(yy)}} \quad (5.48)$$

Onde:

$r$  é o coeficiente de correlação

$S(xy)$  é a covariância de  $x$  e  $y$

$S(xx)$  é a variância de  $x$

$S(yy)$  é a variância de  $y$

Para essa expressão o cálculo das variâncias e covariâncias são apresentados nas formas dadas a seguir.

$$S(xx) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (5.49)$$

$$S(yy) = \sum (y_i - \bar{y})^2 \quad (5.50)$$

$$S(xy) = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (5.51)$$

Quando o coeficiente de correlação resultar nulo, deverá ser utilizada a expressão de incerteza padrão combinada (3.30) para grandezas não-correlacionadas. Quando o mesmo for não nulo no intervalo  $\pm 1$  a expressão de incerteza padrão combinada (3.32) para grandezas correlacionadas deverá ser usada.

**Visando melhor esclarecimento do procedimento numérico de cálculo, um exemplo pode ser elaborado considerando a medição de dois lados de um retângulo com o objetivo de definir sua área. No exemplo hipotético, supõe-se ter sido utilizado um mesmo equipamento de medição para medir os dois**

lados. O resultado de cinco leituras em condição de repetitividade, bem como os valores necessários para o cálculo do coeficiente de correlação, estão apresentados na tabela 5.2.

Tabela 5.2 - Dados da medição hipotética da área de um retângulo.

	Medida $x$	Medida $y$	$x^2$	$y^2$	$xy$
1	5,007	19,663	25,0700	386,6336	98,4526
2	4,994	19,639	24,9400	385,6903	98,0771
3	5,005	19,640	25,0500	385,7296	98,2982
4	4,990	19,688	24,9001	387,6173	98,2431
5	4,999	19,678	24,9900	387,2237	98,3703
Total	24,995	98,308	124,9501	1932,8945	491,4413

As variâncias experimentais são calculadas pelas expressões (5.49) e (5.50), e a covariância pela expressão (5.51) conforme mostrado a seguir.

$$S(xx) = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum x^2 - \frac{x^2}{n} = 124,9501 - \frac{24,995^2}{5} = 9,5 \times 10^{-5} \quad (5.52)$$

$$S(yy) = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum y^2 - \frac{y^2}{n} = 1932,845 - \frac{98,308^2}{5} = 1,928 \times 10^{-3} \quad (5.53)$$

$$S(xy) = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum xy - \frac{\sum x \cdot \sum y}{n} = 491,4413 - \frac{24,995 \cdot 98,308}{5} = -3,92 \times 10^{-4} \quad (5.54)$$

Substituindo então os valores calculados na expressão (5.46) o valor do coeficiente de correlação fica.

$$r = \frac{S(xy)}{\sqrt{S(xx) \cdot S(yy)}} = \frac{-3,92 \times 10^{-4}}{\sqrt{9,5 \times 10^{-5} \cdot 1,928 \times 10^{-3}}} = -0,916 \quad (5.55)$$

Nesse exemplo verifica-se pelo valor de  $-0.916$  que as variáveis consideradas são fortemente e inversamente correlacionadas. Tal fato seria então justificado no exemplo hipotético pelo fato das duas dimensões do retângulo terem sido medidas com um mesmo instrumento que de algum modo influencia significativamente os

resultados. Se nesse exemplo a incerteza padrão combinada tivesse que ser determinada a expressão (3.32) deveria ser usada no cálculo para que fosse ponderada adequadamente a correlação verificada.

Vale ainda comentar um caso mais complexo onde há duas variáveis não dependentes entre si mas ambas dependentes de uma terceira. Nestes casos técnicas de análise de correlação múltipla devem ser usadas não sendo entretanto aqui discutidas por fugirem do escopo desta discussão que é voltada ao tratamento das incertezas das medições na indústria. Apesar disso, cabe observar que esse não é um caso raro para a metrologia dimensional, já que a temperatura é um fator de influência significativo na maioria dos casos práticos, deixando-se assim tal discussão para outras iniciativas decorrentes do trabalho aqui discutido.

## **5.6 - Procedimento simplificado de cálculo de incerteza de medição para metrologia dimensional na indústria.**

Conforme visto no capítulo 4 e discutido no início deste capítulo, as indústrias têm necessidade de calcular as incertezas de seus equipamentos de medição de uma forma mais simples e prática. Para que isso ocorra elas tem necessidade de utilizar um procedimento de cálculo de incerteza que, embora simplificado, não afete significativamente os resultados calculados para a incerteza.

A seguir um procedimento simplificado de cálculo de incerteza para utilização em laboratórios de metrologia dimensional na indústria é mostrado, cujas simplificações propostas em relação às recomendações normativas estão também presentes. Alguns pontos das simplificações e suas conseqüências nos resultados são melhor verificadas através de exemplos numéricos, sendo por isso apresentados os estudos de caso no capítulo 6. Um exemplo do mesmo procedimento já formatado para a utilização na indústria é também apresentado no anexo 6.

Deve-se inicialmente determinar a relação matemática existente entre as grandezas de entrada e de saída, utilizando a expressão (3.28) mostrada novamente a seguir.

$$y = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_M) \quad (5.56)$$

Em seguida, deve-se listar as fontes de incertezas envolvidas na calibração baseado nas informações do sistema de medição e observando os seguintes condicionantes:

- O coeficiente de expansão térmica não deverá ser levado em consideração se a diferença entre o valor do coeficiente do padrão em relação ao do instrumento a ser calibrado for menor ou igual a  $5,0 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .
- Se a temperatura do ambiente de medição tiver uma diferença em relação a temperatura de referência ( $20^\circ\text{C}$ ) menor ou igual a  $2^\circ\text{C}$ , ela não deverá também ser levada em consideração.
- Os dois condicionantes devem ser aplicados em medições envolvendo comprimentos de até 1000mm.

Nessa etapa a simplificação está na não utilização dos coeficientes de expansão térmica e da temperatura se ambos estiverem dentro dos limites estabelecidos. Esta simplificação se fundamenta no fato que estes valores estabelecidos não geram diferenças significativas nos resultados de incerteza. Tais resultados serão melhor visualizados numericamente pelos estudos de caso do capítulo 6.

Deve-se então avaliar as incertezas padrão  $u(x_i)$  de cada fonte de incerteza, observando que a estimativa de entrada, obtida através de análise estatística, deva ser avaliada como tipo A. Já a estimativa de entrada obtida por outros meios, deve ser avaliada como tipo B da incerteza padrão. Para as avaliações tipo A utiliza-se a expressão da média e desvio padrão amostral para a determinação da incerteza padrão  $u(x_k)$ . As expressões a seguir ilustram o procedimento.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (5.57)$$

$$s(x_k) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (5.58)$$

$$u(x) = s(\bar{x}) = \frac{s(x_k)}{\sqrt{n}} \quad (5.59)$$

Para as avaliações tipo B utiliza-se as expressões abaixo de acordo com o tipo de distribuição suposta para a variável de entrada analisada.

Quando a distribuição puder ser suposta Normal tendo sido informado o limite de variação  $U$  e o fator de abrangência  $k$  da variável, calcula-se a respectiva incerteza conforme indica (5.60)

$$u(x) = \frac{U}{k} \quad (5.60)$$

Quando a distribuição puder ser suposta t-student tendo sido informado o limite de variação  $U$  e o número de medições repetidas, calcula-se a respectiva incerteza conforme indica a expressão (5.59)

$$u(x) = \frac{U}{n-1} \quad (5.61)$$

Quando a distribuição for qualquer outra, exceto Normal e t-student, sugere-se o uso do modelo retangular ou uniforme, resultando na incerteza padrão  $u(x_k)$  dada por (5.62).

$$u(x_k) = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad (5.62)$$

Nesse caso a simplificação proposta é a utilização da distribuição retangular para qualquer distribuição que por hipótese não possa ser suposta Normal e t-student. Essa simplificação se justifica inicialmente pelo fato de que é difícil para o usuário discernir sobre o tipo de distribuição a ser utilizada. Além disso, a utilização da distribuição retangular é mais segura quando houver dúvida sobre qual modelo adotar, uma vez que o valor da incerteza  $u(x_k)$  assim calculado é maior se comparado com outros modelos de distribuição, trabalhando-se assim em favor da segurança na declaração da incerteza. Vale observar ainda que a recomendação NIS3003 também estabelece que a distribuição retangular é o modelo mais indicado quando não houverem informações mais objetivas sobre suas verdadeiras características (NAMAS, 1995).

Calcula-se então a incerteza padrão combinada a partir dos resultados das incertezas  $u(x_k)$ , A expressão a seguir deve ser usada neste procedimento.

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{k=1}^M c_i^2 u^2(x_i)} = \sqrt{c_1^2 u^2(x_1) + c_2^2 u^2(x_2) + \dots + c_N^2 u^2(x_M)} \quad (5.63)$$

Aqui a simplificação está no uso da expressão da incerteza padrão combinada para grandezas de entrada não correlacionadas, desconsiderando eventuais correlações. Esta simplificação é justificada pelo fato de que, segundo Kessel (1996), a grande maioria das medições dimensionais têm variáveis ou fatores de influência que podem ser considerados não correlacionados se na calibração for mantido um mínimo de rigor sobre as condições padrão, caso comum das aplicações industriais.

Determina-se então a incerteza expandida  $U$  multiplicando a incerteza padrão combinada  $u_c(y)$  por um fator de abrangência constante  $k = 2$ , conforme mostra a expressão a seguir.

$$U = k u_c(y) \quad (5.64)$$

Nessa etapa a simplificação é relativa à não utilização dos graus de liberdade efetivos e dos níveis de confiança para a determinação do fator de abrangência. Isso é justificado pelo fato da constatação prática de que tal aproximação numérica não resulta em prejuízos significativos para a incerteza padrão expandida num grande número de casos. Esta justificativa será também melhor exemplificada pelo estudo de caso trazido no capítulo 6.

Finalmente, pode-se expressar o resultado final da medição conforme ilustrado na expressão (5.65) a seguir.

$$Rm = Vm \pm U \text{ (unidade)} \quad (5.65)$$

Para completar a especificação, acrescenta-se ao resultado da medição a recomendação dos documentos normativos na qual explicita-se as condições gerais usadas nos cálculos, através da seguinte declaração.

"A incerteza informada é baseada em uma incerteza padrão e num fator de abrangência de  $k = 2$ , gerando um nível de confiança de aproximadamente 95%".

## Capítulo 6

### 6 - ESTUDO DE CASOS

A seguir dois estudos de casos visando o cálculo de incerteza de medição são discutidos de acordo com o procedimento para avaliação e expressão da incerteza do Guia (ABNT/INMETRO, 1998) e segundo o procedimento simplificado proposto.

O primeiro estudo de caso trata da calibração de um bloco-padrão classe 0 com comprimento nominal de 100 mm. Blocos-padrão são peças fabricadas em ligas de aço, carboneto de tungstênio, cerâmica ou carboneto de cromo (Starrett, 1996), Tipicamente eles têm forma de paralelepípedos padronizados nas dimensões de 30 ou 35 mm x 9 mm, variando na espessura a partir de 0,1 mm até 1000 mm. São encontrados nas escalas de milímetros e polegadas, sendo muito utilizados como padrão de referência na indústria. A discutida calibração foi realizada através da comparação mecânica do bloco a ser calibrado com um bloco padrão de referência, seguindo a instrução de calibração operacional apresentada no anexo 4 cujos dados foram fornecidos pelo laboratório Laroylab da Starrett Indústria e Comércio.

O segundo estudo de caso é referente a calibração de um micrômetro externo milesimal, analógico, com capacidade de leitura de 25 mm. O micrômetro é um instrumento de medição muito utilizado na indústria, tendo sido conhecido no passado como calibre de parafuso ou mesmo palmer, devido ao nome do seu inventor. Seu princípio de funcionamento baseia-se no avanço axial de um parafuso micrométrico, cujo deslocamento longitudinal é proporcional ao número de voltas e ao passo do referido parafuso. A calibração do micrômetro foi realizada no setor de metrologia da Unidade Fabril 16 das Indústrias Romi, pelo método direto, através da medição de uma série de blocos-padrão de referência de classe 0, paralelos óticos e planos óticos, conforme a instrução de calibração apresentada no anexo 5.



## 6.1 - Cálculo de Incerteza da Calibração de Blocos-Padrão.

A discussão do cálculo da incerteza do estudo de caso será apresentada de acordo com a seguinte estratégia. O cálculo será apresentado de acordo com as recomendações do Guia, seguindo-se a mesma análise de acordo com o procedimento simplificado proposto. A análise comparativa dos procedimentos será então apresentada, permitindo avaliar comparativamente os procedimentos e os resultados, em cada uma das suas etapas. Esta estratégia é detalhada nos itens a seguir.

Com o objetivo de mostrar quais os fatores de influência envolvidos na medição do bloco-padrão, o sistema de medição está demonstrado na figura 6.1. Conforme pode ser visto na figura 6.1, o padrão e o bloco a ser calibrado são colocados no comparador e medidos entre os apalpadores, configurado-se portanto uma medição diferencial.

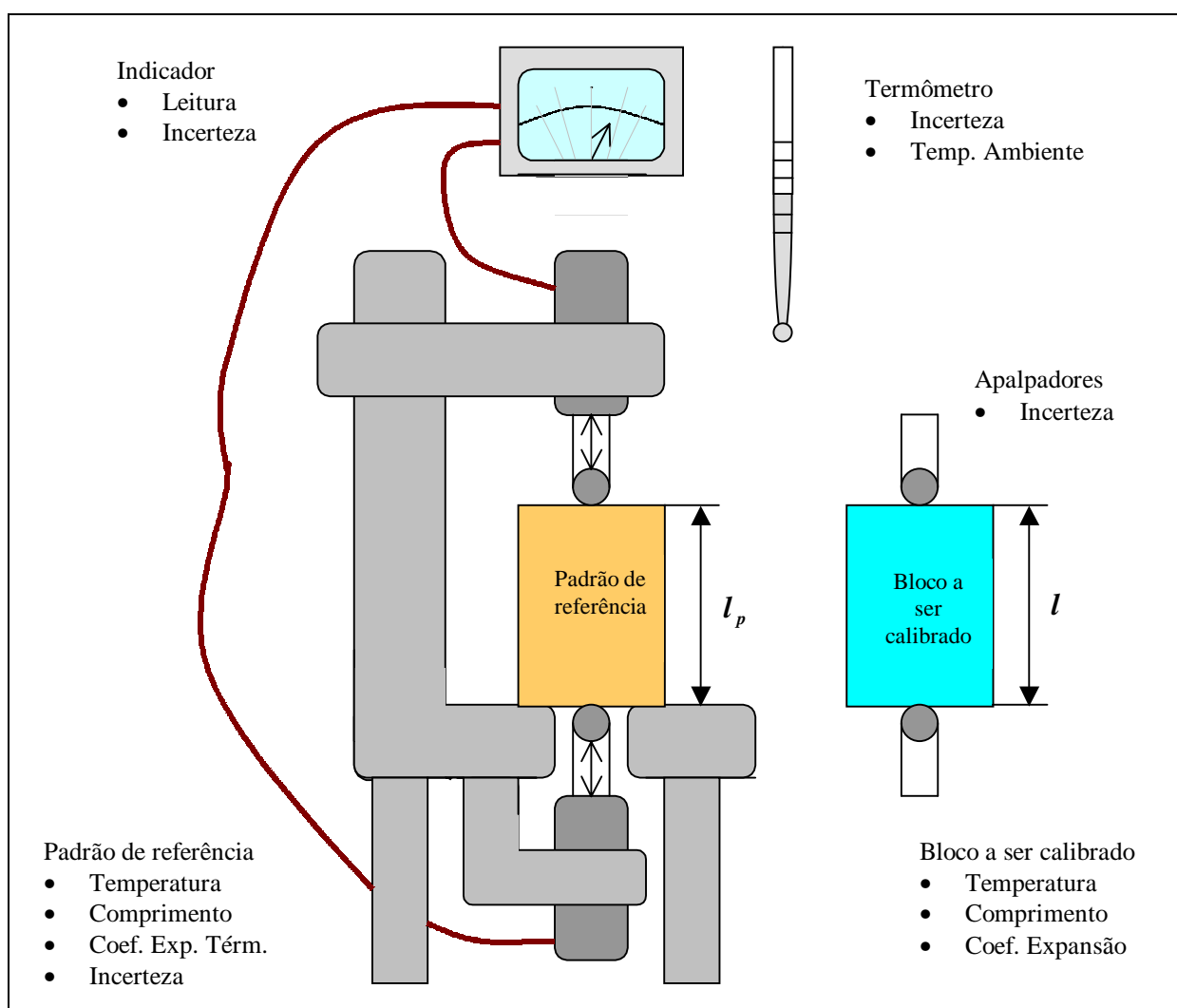


Figura 6.1 - Diagrama esquemático do sistema de calibração do bloco-padrão (Decker/Pekelsky, 1995)

Na calibração do bloco, cujo sistema de medição é representado esquematicamente pela figura 6.1, foram colhidos os seguintes dados:

- Padrão: Bloco-padrão de referência com as seguintes características:
  - Comprimento Nominal : 100 mm com erro no meio de + 0,02  $\mu\text{m}$
  - Material: Aço
  - Coeficiente de expansão térmica ( $\alpha$ ) :  $11,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \pm 10\%$ .
  - Incerteza ( $U_P$ ) :  $(0,04 + 0,2 \times L/1000)$  [ $\mu\text{m}$ ] com L em [mm].
  
- Mensurando: Bloco-padrão Calibrado, classe 0, com as seguintes características:
  - Comprimento Nominal : 100 mm
  - Material: Aço
  - Coeficiente de expansão térmica ( $\alpha$ ) :  $11,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \pm 10\%$ .
  
- Termômetro
  - Incerteza do termômetro ( $U_T$ ) :  $\pm 0,1 \text{ }^\circ\text{C}$ .
  
- Comparadores
  - Incerteza dos comparadores ( $U_C$ ) :  $\pm 0,06 \mu\text{m}$ .
  - Força de penetração do comparador: Superior :  $60\text{g} \pm 5\%$  e Inferior =  $30\text{g} \pm 5\%$ .
  
- Local de ensaio
  - Temperatura durante a medição :  $19,9 \text{ }^\circ\text{C}$  a  $20,1 \text{ }^\circ\text{C}$ .
  
- Temperaturas dos Blocos
  - Diferença de temperatura entre o bloco calibrado e o padrão nula.  
Nota: A diferença de temperatura pode ser considerada nula porque os blocos foram mantidos no mesmo local de ensaio por um período suficiente para que suas temperaturas estabilizassem num ponto de equilíbrio para calibração.
  - Diferença da temperatura do bloco calibrado e do padrão, com relação a temperatura de referência de  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  :  $\pm 0,1 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Nota: Nesse caso foi adotada a variação de temperatura do local de ensaio durante a medição.

- Resultado de medição
  - Comprimento verificado na calibração (03 leituras no centro) : 0,10  $\mu\text{m}$ ; 0,12  $\mu\text{m}$ ; 0,11  $\mu\text{m}$ .

O cálculo da incerteza será apresentado por etapas de acordo com os oito passos do procedimento do Guia (ABNT/INMETRO, 1998).

**Etapa 1** - Expresse, matematicamente, a relação entre o mensurando  $Y$  e as grandezas de entrada  $X_i$ , das quais  $Y$  depende:  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ . A função  $f$  deverá conter cada grandeza, incluindo todas as correções e fatores de correção, que podem contribuir com um componente de incerteza, significativo para o resultado de medição.

Segundo o procedimento do Guia, num sistema de medição as fontes de incertezas primárias são; a diferença de temperatura do local de medição em relação a temperatura de referência, que pode ser chamada de  $\theta$ , e o coeficiente de expansão térmica ( $\alpha$ ) do material envolvido.

Dessa forma, o comprimento do bloco à temperatura  $\theta$  é dado por:

$$l\{\theta\} = l(1 + \alpha\theta) \quad (6.1)$$

onde  $l$  é o comprimento à temperatura de referência.

Na calibração do bloco padrão a comparação de dois elementos fornece a diferença  $d$  entre seus comprimentos, nominalmente de 100 mm, e representa a informação de calibração procurada no caso em estudo. A diferença  $d$  procurada será então dada por:

$$\begin{aligned} d &= l\{\theta\} - l_p\{\theta_p\} \\ d &= l(1 + \alpha\theta) - l_p(1 + \alpha_p\theta_p) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Onde:  $l$  é o mensurando, que representa o comprimento a 20°C do bloco calibrado;

$l_p$  é o comprimento do padrão a 20°C, na forma dada em seu certificado de calibração;

$\alpha$  e  $\alpha_p$  são os coeficientes de expansão térmica do bloco calibrado e do padrão;

$\theta$  e  $\theta_p$  são os desvios na temperatura de cada elemento, com relação à temperatura de referência de 20°C.

A expressão (6.2) pode ser trabalhada isolando o comprimento do bloco calibrado, então:

$$l = \frac{l_p (1 + \alpha_p \theta_p) + d}{(1 + \alpha \theta)} \quad (6.3)$$

A expressão 6.3 pode ser aproximada por uma função polinomial, substituindo  $(1 + \alpha \theta)^{-1}$  pela sua expansão binomial :  $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots (x^2 < 1)$  (Decker/Pekelsky, 1995). Negligenciando os termos de maior ordem no polinômio, e retendo somente os termos significantes de primeira ordem, temos:

$$l \approx d + l_p (1 + \alpha_p \theta_p - \alpha \theta) \quad (6.4)$$

Se a diferença de temperatura ( $\delta\theta$ ) entre o bloco calibrado e o padrão é escrita como  $\delta\theta = \theta - \theta_p$ , e a diferença entre os seus coeficientes de expansão térmica como  $\delta\alpha = \alpha - \alpha_p$ , a expressão (6.4) torna-se:

$$l = l_p + d - l_p [\delta\alpha \theta + \alpha_p \delta\theta] \quad (6.5)$$

Toma-se então as diferenças  $\delta\theta$  e  $\delta\alpha$  como nulas, porém não as suas incertezas. Assume-se ainda  $\delta\alpha$ ,  $\alpha_p$ ,  $\delta\theta$  e  $\theta$  como grandezas não correlacionadas. Observa-se que se o comprimento do bloco calibrado (mensurando) fosse expresso como função das variáveis  $\theta$ ,  $\theta_p$ ,  $\alpha$  e  $\alpha_p$ , seria

necessário incluir a correlação entre  $\theta$  e  $\theta_p$  e entre  $\alpha$  e  $\alpha_p$ . Segue-se da expressão (6.3) que a estimativa do valor do mensurando (medida  $l$ ) pode ser obtida por:

$$l = l_p + \bar{d} \quad (6.6)$$

Onde  $l_p$  é o comprimento do padrão de referência a 20°C, na forma dada em seu certificado de calibração, e  $d$  é estimado pela média aritmética de 3 observações ( $n = 3$ ) repetidas e independentes.

Segundo o procedimento simplificado proposto, as expressões (6.1), (6.2), (6.3), (6.4) e (6.5) desaparecem devido a não utilização do coeficiente de expansão térmica e da temperatura.

Assim sendo, somente a expressão (6.6) é utilizada no procedimento simplificado.

**Etapla 2** - Determine  $x_i$  que é o valor estimado da grandeza de entrada  $X_i$ , seja com base em análise estatística de uma série de observações ou por outros meios.

Conforme o procedimento do Guia, da expressão (6.5) é possível listar todas as grandezas ( $x_i$ ), possibilitando a modelagem da expressão conforme (3.29).

$$l = f(l_p, d, \alpha_p, \theta, \delta\alpha, \delta\theta) \quad (6.7)$$

Onde:

$$l_p = 100,00002 \text{ mm}$$

$$d = 0,10 \mu\text{m} ; 0,12 \mu\text{m} ; 0,11 \mu\text{m} \rightarrow \bar{d} = 0,11 \mu\text{m}$$

$$\alpha_p = 11,5 \times 10^{-6} \pm 10\%$$

$$\theta = 19,9 \text{ a } 20,1^\circ\text{C} = \pm 0,1^\circ\text{C}$$

$$\delta\theta = 0$$

$$\delta\alpha = 0$$

Já pelo procedimento simplificado, nesta etapa, somente parte da expressão (6.7) permanece pois o coeficiente de expansão térmica e a temperatura são desprezados. A expressão (6.7) fica:

$$l = f(l_p, d)$$

**Etapa 3** - Avalie a incerteza padrão  $u(x_i)$  de cada estimativa de entrada  $x_i$ . Para uma estimativa de entrada obtida através de análise estatística de uma série de observações, a incerteza padrão é avaliada a partir de avaliações Tipo A da incerteza padrão. Para uma estimativa de entrada obtida por outros meios, a incerteza padrão  $u(x_i)$  é avaliada como segundo avaliações Tipo B.

Em conformidade com o procedimento do Guia, tem-se as seguintes incertezas:

**a) Incerteza de calibração do padrão de referência,  $u(l_p)$**

O certificado de calibração traz como incerteza expandida do padrão de referência a quantia  $U_p = (0,04 + 0,2 \times 100/1000) = 0,06 \mu m$ , e informa que a mesma foi obtida para um fator de abrangência  $k = 2$ . Com isso, a incerteza padrão do mesmo pode ser obtida pela expressão (3.18) resultando em:

$$u(l_p) = \frac{U_p}{2} = \frac{0,06}{2} = 0,03 \mu m \quad (6.8)$$

**b) Incerteza da diferença medida no comprimento,  $u(d)$**

Na calibração foram feitas 3 medições em condições de repetitividade, tendo sido encontrados os seguintes valores:  $0,10 \mu m$ ;  $0,12 \mu m$ ;  $0,11 \mu m$ . Com base nesses valores determinou-se a média pela expressão (3.3) onde:

$$\bar{d} = \frac{0,10 + 0,12 + 0,11}{3} \quad (6.9)$$

$$\bar{d} = 0,11 \mu m$$

Em seguida calculou-se a variância amostral pela expressão (3.7) onde:

$$s^2(d) = \frac{(0,10 - 0,11)^2 + (0,12 - 0,11)^2 + (0,11 - 0,11)^2}{3 - 1} \quad (6.10)$$

$$s^2(d) = 0,0001 \mu m$$

De posse da variância amostral, a variância experimental da média pode ser calculada conforme mostra a expressão (3.17), resultando em:

$$s^2(\bar{d}) = \frac{0,0001}{3} \quad (6.11)$$

$$s^2(\bar{d}) = 3,33 \times 10^{-5} \mu m$$

Disso, tomou-se a raiz quadrada positiva da variância experimental da média, por definição a incerteza padrão, chegando-se a:

$$u(\bar{d}) = \sqrt{s^2(\bar{d})} = \sqrt{3,33 \times 10^{-5}} \quad (6.12)$$

$$u(\bar{d}) = 5,77 \times 10^{-3} = 0,006 \mu m$$

Na incerteza da diferença medida no comprimento  $u(d)$ , estão presentes também as incertezas dos instrumentos comparadores usados para comparar  $l$  com  $l_p$ .

A incerteza de cada comparador é de  $\pm 0,06 \mu m$ , com um nível de confiança de 95%, segundo informações do fabricante. Uma vez que a incerteza de cada comparador se baseia em 6 medições repetidas, sua incerteza padrão é calculada tomando-se da tabela do anexo 2 o fator t-Student  $t_{95} = 2,57$  para  $\nu = 6 - 1 = 5$  graus de liberdade, resultando em:

$$u(d_1) = \frac{0,06}{2,57} = 0,023 \mu m \quad (6.13)$$

$$u(d_2) = \frac{0,06}{2,57} = 0,023 \mu m \quad (6.14)$$

A contribuição total é obtida pela soma das variâncias estimadas, devidas a estes efeitos, resultando em:

$$u^2(d) = u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) = 0,006^2 + 0,023^2 + 0,023^2 = 1,094 \times 10^{-3}$$

$$u(d) = \sqrt{1,094 \times 10^{-3}} = 0,033 \mu m \quad (6.15)$$

**c) Incerteza do coeficiente de expansão térmica,  $u(\alpha_p)$**

O coeficiente de expansão térmica do padrão é assumido  $\alpha_p = 11,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , com uma incerteza representada por uma distribuição retangular, com limites  $\pm 1,15 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ . A incerteza padrão conforme a equação (3.21), fica:

$$u(\alpha_p) = \frac{1,15 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}}{\sqrt{3}} = 0,66 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \quad (6.16)$$

**d) Incerteza do desvio de temperatura do bloco calibrado,  $u(\theta)$**

A temperatura do ambiente do ensaio é registrada em  $20 \pm 0,1 \text{ } ^\circ\text{C}$ , não tendo sido registrada as temperaturas individuais no momento das observações. Como, nesse caso, a temperatura ambiente pode assumir qualquer valor dentro do intervalo de  $\pm 0,1 \text{ } ^\circ\text{C}$ , tem-se uma distribuição uniforme cuja incerteza padrão, conforme a expressão (3.21), é:

$$u(\theta) = \frac{0,1}{\sqrt{3}} = 0,06 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (6.17)$$

**e) Incerteza da diferença nos coeficientes de expansão,  $u(\delta\alpha)$**

Os limites estimados da variabilidade de  $\delta\alpha$  são de  $\pm 1,15 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  com uma igual probabilidade da variável assumir qualquer valor nestes limites (distribuição uniforme). Sua incerteza padrão é dada pela expressão (3.21), que fica:

$$u(\delta\alpha) = \frac{1,15 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}}{\sqrt{3}} = 0,66 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \quad (6.18)$$



**f) Incerteza da diferença nas temperaturas dos calibradores,  $u(\delta\theta)$**

As temperaturas do padrão e do bloco calibrado são supostas iguais dentro de um intervalo de  $\pm 0,05^\circ\text{C}$ . Novamente, igual probabilidade para as temperaturas em qualquer lugar do intervalo é suposta (distribuição uniforme), chegando-se a seguinte incerteza padrão pela expressão (3.21).

$$u(\delta\theta) = \frac{0,05^\circ\text{C}}{\sqrt{3}} = 0,029^\circ\text{C} \quad (6.19)$$

Nesta etapa, a única simplificação do procedimento proposto, perante o procedimento do Guia, é a utilização da distribuição retangular quando não for conhecida a distribuição ideal para representar a fonte de incerteza. Como no procedimento simplificado não foram utilizados; a diferença de temperatura  $\delta\theta$  e o coeficiente de expansão térmica  $\alpha$ , por estarem ambos nos limites de variação previstos para sua desconsideração, as incertezas do coeficiente de expansão térmica  $u(\alpha_p)$ , do desvio de temperatura do bloco calibrado  $u(\theta)$ , da diferença nos coeficientes de expansão  $u(\delta\alpha)$  e a da diferença nas temperaturas dos calibradores  $u(\delta\theta)$ , também foram desconsideradas.

**Etapa 4** - Avalie as covariâncias associadas com quaisquer estimativas de entrada que sejam correlacionadas.

Para este caso, independente do procedimento utilizado, não há covariância associada pois as estimativas de entrada são consideradas não-correlacionadas.

**Etapa 5** - Calcule o resultado da medição, isto é, a estimativa  $y$  do mensurando  $Y$ , a partir da relação funcional  $f$ , utilizando como grandezas de entrada  $X_i$  as estimativas  $x_i$ , obtidas no passo 2.

Nesta etapa, o cálculo utilizado é o mesmo, independente do procedimento utilizado.

$$l = l_p + \bar{d} \quad (6.20)$$

$$l = 100,00002 + 0,00011$$

$$l = 100,00013mm$$

**Etapa 6** - Determine a incerteza padrão combinada  $u_c(y)$  do resultado da medição  $y$ , a partir das incertezas padrão e covariâncias associadas às estimativas de entrada. Se a medição determina, simultaneamente, mais de uma grandeza de saída, calcule suas covariâncias.

Conforme o procedimento do Guia, como as estimativas de entrada não são correlacionadas, a incerteza padrão combinada  $u_c(l)$  é obtida aplicando-se a expressão (3.30) mostrada a seguir:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) \quad (6.21)$$

Uma vez que  $\delta\alpha = 0$  e  $\delta\theta = 0$ , a aplicação da equação (6.7) à equação (6.21) resulta em:

$$u_c^2(l) = c_p^2 u^2(l_p) + c_d^2 u^2(d) + c_{\alpha_p}^2 u^2(\alpha_p) + c_{\theta}^2 u^2(\theta) + c_{\delta\alpha}^2 u^2(\delta\alpha) + c_{\delta\theta}^2 u^2(\delta\theta) \quad (6.22)$$

Resolvendo as derivadas parciais, tem-se:

$$\begin{aligned} c_p &= \partial f / \partial l_p = 1 - (\delta\alpha\theta + \alpha_p \delta\theta) = 1 \\ c_d &= \partial f / \partial d = 1 \\ c_{\alpha_p} &= \partial f / \partial \alpha_p = -l_p \delta\theta = 0 \\ c_{\theta} &= \partial f / \partial \theta = -l_p \delta\alpha = 0 \\ c_{\delta\alpha} &= \partial f / \partial \delta\alpha = -l_p \theta \\ c_{\delta\theta} &= \partial f / \partial \delta\theta = -l_p \alpha_p \end{aligned} \quad (6.23)$$

Tem-se então a incerteza padrão combinada dada por:

$$u_c^2(l) = u^2(l_p) + u^2(d) + l_p^2 \theta^2 u^2(\delta\alpha) + l_p^2 \alpha_p^2 u^2(\delta\theta) \quad (6.24)$$

Uma vez tecidas as considerações acerca das incertezas individuais, a incerteza padrão combinada  $u_c(l)$  é calculada pela equação (6.24), resultando na expressão mostrada a seguir.

$$\begin{aligned} u_c^2(l) &= (0,03)^2 + (0,033)^2 + \\ &+ (0,10m)^2 (0,1^\circ C)^2 (0,66 \times 10^{-6} \text{ }^\circ C^{-1})^2 + \\ &+ (0,10m)^2 (11,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ C^{-1})^2 (0,029^\circ C)^2 \\ &= (0,03 \mu m)^2 + (0,033 \mu m)^2 + (6,6 \times 10^{-9} \mu m)^2 + (3,33 \times 10^{-8} \mu m)^2 \\ u_c(l) &= \sqrt{1,989 \times 10^{-3} \mu m} = 0,044 \mu m \end{aligned} \quad (6.25)$$

No procedimento simplificado esta difere do procedimento do Guia quanto a não utilização das incertezas relativas ao coeficiente de expansão térmica e temperatura. Desta forma, a expressão (6.22) é alterada resultando na expressão mostrada a seguir:

$$u_c^2(l) = c_p^2 u^2(l_p) + c_d^2 u^2(d)$$

Já as derivadas parciais, pelo procedimento simplificado, ficam:

$$c_p = \partial f / \partial l_p = 1$$

$$c_d = \partial f / \partial d = 1$$

Com isso, a incerteza padrão combinada teve sua expressão reduzida a:

$$u_c^2(l) = u^2(l_p) + u^2(d)$$

Tendo o seguinte resultado:

$$u_c^2(l) = u^2(l_p) + u^2(d)$$

$$u_c^2(l) = 0,03^2 + 0,033^2$$

$$u_c(l) = \sqrt{1,989 \times 10^{-3}} \mu m = 0,044 \mu m$$

Nesse caso, embora as incertezas padrão envolvidas sejam diferentes, o resultado não foi alterado significativamente dentro do número de algarismos significativos adotados no cálculo.

Para melhor visualização das fontes de incertezas, bem como dos valores envolvidos nos dois procedimentos, são apresentadas a seguir as planilhas de incertezas tabelas (6.1) e (6.2)

Tabela 6.1 - Planilha de incerteza do procedimento de cálculo conforme o Guia:

Grandeza $X_i$	Estimativa $x_i$	Incerteza padrão $u(x_i)$	Distribuição de probabilidade	Coefficiente de sensibilidade $c_i$	Contribuição para a incerteza $u(y_i)$
$l_p$	100,00002mm	0,03 $\mu m$	Normal	1,0	0,03 $\mu m$
$d$	0,00011mm	0,033 $\mu m$	-	1,0	0,033 $\mu m$
$\alpha_p$	$1,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$	$0,87 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$	Retangular	0	0
$\theta$	0,1 $^\circ C$	0,06 $^\circ C$	Retangular	0	0
$\delta\alpha$	$1,15 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$	$0,66 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$	Retangular	$-l_p \theta$	$6,0 \times 10^{-9} \mu m$
$\delta\theta$	0,05 $^\circ C$	0,029 $^\circ C$	Retangular	$-l_p \alpha_p$	$3,33 \times 10^{-8} \mu m$
$l$	100,00013mm				0,044 $\mu m$

Tabela 6.2 - Planilha de incerteza do procedimento de cálculo conforme o procedimento simplificado:

Grandeza $X_i$	Estimativa $x_i$	Incerteza padrão $u(x_i)$	Distribuição de probabilidade	Coefficiente de sensibilidade $c_i$	Contribuição para a incerteza $u(y_i)$
$l_p$	100,00002mm	0,03 $\mu m$	Normal	1,0	0,03 $\mu m$
$d$	0,00011mm	0,033 $\mu m$	-	1,0	0,033 $\mu m$
$l$	100,00013mm				0,044 $\mu m$

**Etapa 7** - Se é necessário fornecer uma incerteza expandida  $U$ , cujo propósito é definir o intervalo  $y \pm U$ , multiplica-se a incerteza padrão combinada  $u_c(y)$  por um fator de abrangência  $k$ , tipicamente na faixa de 2 a 3. Seleciona-se  $k$  com base no nível de confiança requerido ao intervalo.

Segundo o Guia, para o cálculo da incerteza expandida é necessário inicialmente calcular os graus de liberdade associados à expressão da incerteza padrão combinada  $u_c(y)$ . Para isso deve-se considerar cada elemento componente de  $u_c(y)$ , gerando as seguintes considerações:

Para a Incerteza de calibração do padrão  $u(l_p)$ , o certificado de calibração estabelece que seus graus de liberdade efetivos são de 18 ou seja,  $v_{eff}(l_p) = 18$ .

A incerteza da diferença medida nos comprimentos  $u(d)$  é ponderada considerando: Por terem sido obtidas de três observações repetidas, os graus de liberdade de  $u(\bar{d})$  são  $v(\bar{d}) = 3 - 1 = 2$ . Os graus de liberdade de  $u(d_1)$  são  $v(d_1) = 6 - 1 = 5$  para cada comparador, devido a  $d_1$  ter sido obtido de seis medições repetidas. Os graus de liberdade efetivos de  $v(d)$ , ou seja  $v_{eff}(d)$ , é então obtido pela equação (3.36) que é repetida abaixo.

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}} \quad (6.26)$$

$$v_{eff}(d) = \frac{\left[ u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) \right]^2}{\frac{u^4(\bar{d})}{v(\bar{d})} + \frac{u^4(d_1)}{v(d_1)} + \frac{u^4(d_2)}{v(d_2)}} = \frac{(0,033\mu m)^4}{\frac{(0,006\mu m)^4}{2} + \frac{(0,023\mu m)^4}{5} + \frac{(0,023\mu m)^4}{5}} = 10,5$$

Para a incerteza da diferença nos coeficientes de expansão  $u(\delta\alpha)$ , os limites estimados de  $\pm 1,15 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  sobre a variabilidade de  $\delta\alpha$  são julgados confiáveis a 10%. Isto fornece  $v(\delta\alpha) = 50$ .

Já no cálculo da incerteza da diferença na temperatura dos blocos  $u(\delta\theta)$  o intervalo estimado de  $\pm 0,05^\circ\text{C}$  para a diferença de temperatura  $\delta\theta$  é assumida confiável somente a 50%. Tal hipótese fornece  $\nu(\delta\theta) = 2$  para este parâmetro.

O cálculo de  $\nu_{eff}(l)$  é análogo ao cálculo de  $\nu_{eff}(d)$  ilustrado pela expressão (6.27) abaixo. Assim, da equação (6.26) e dos graus de liberdade  $\nu$  acima discutidos tem-se:

$$\nu_{eff}(l) = \frac{u_c^4(l)}{\frac{u^4(l_p)}{\nu(l_p)} + \frac{u^4(d)}{\nu(d)} + \frac{u^4(\delta\alpha)}{\nu(\delta\alpha)} + \frac{u^4(\delta\theta)}{\nu(\delta\theta)}} \quad (6.27)$$

$$\nu_{eff}(l) = \frac{(0,044\mu\text{m})^4}{\frac{(0,03\mu\text{m})^4}{18} + \frac{(0,033\mu\text{m})^4}{10} + \frac{(6,6 \times 10^{-9}\mu\text{m})^4}{50} + \frac{(3,33 \times 10^{-8}\mu\text{m})^4}{2}} =$$

$$\nu_{eff}(l) = 23,0$$

Tomando o correspondente  $k_{95}$  da tabela t-Student (anexo 2),  $t_{95}(23) = 2,07$ , a incerteza expandida  $U_{95} = t_{95}(23)u_c(l)$  conforme expressão (3.38) resulta em:

$$U_{95} = 2,07 \times 0,044\mu\text{m} = 0,091\mu\text{m} \quad (6.28)$$

Nesta etapa, conforme o procedimento do Guia, os graus de liberdade efetivos e os níveis de confiança para a determinação do fator de abrangência são levados em consideração. Já no procedimento proposto, isto não ocorre pois o mesmo não utiliza os graus de liberdade efetivos, considerando sempre o fator de abrangência  $k = 2$ . Desta forma, as expressões 6.26 e 6.27 não são utilizadas e o resultado da incerteza expandida para cada procedimento foi:

Para o procedimento conforme o Guia, o resultado foi conforme a expressão (6.28) onde foi tomado o correspondente  $k_{95}$  para  $t_{95}(23) = 2,07$  cujo resultado foi:

$$U_{95} = 2,07 \times 0,044 \mu m = 0,091 \mu m \quad (6.28)$$

Já para o procedimento simplificado onde deve ser utilizado sempre  $k = 2$ , o resultado foi:

$$U = k \times u_c(l)$$

$$U = 2 \times 0,044 \mu m = 0,088 \mu m$$

Nesta etapa pode ser observado que os valores da incerteza expandida diferem, mas a variação de  $0,003 \mu m$  pode ser considerada desprezível para a grande maioria de aplicações na indústria.

**Etapa 8** - Relate o resultado da medição  $y$  juntamente com sua incerteza padrão  $u_c(y)$  ou incerteza expandida  $U$ , usando um dos formatos recomendados. Descreva, como  $y$  e  $u_c(y)$  ou  $U$  foram obtidos.

#### **Resultado final da calibração.**

O certificado de calibração especifica o comprimento do padrão a  $20^\circ\text{C}$  em  $l_p = 100,00002$  mm. A média aritmética  $\bar{d}$  de três observações repetidas da diferença entre o comprimento do bloco calibrado e do padrão é de  $0,00011 \mu m$ . Assim, como  $l = l_p + \bar{d}$ , o comprimento  $l$  do bloco calibrado a  $20^\circ\text{C}$  é  $100,00013$  mm.

De acordo com o Guia, o resultado final da medição pode ser estabelecido como  $l = 100,00013$  mm, com uma incerteza padrão combinada  $u_c = 0,044 \mu m$  e com uma incerteza expandida  $U = 0,091 \mu m$ .

Dessa forma, o resultado final do cálculo da incerteza para o bloco padrão calibrado de acordo com a expressão (3.39) novamente representada abaixo temos:

$$Rm = Vm \pm U \text{ (unidade)} \quad (6.29)$$

$$Rm = 100,00013 \text{ mm} \pm 0,091 \mu m$$

Cuja declaração é: "A declaração da expressão da incerteza para o bloco calibrado é baseada na incerteza padrão combinada multiplicada por um fator de abrangência  $k = 2,07$ , fornecendo um nível de confiança de aproximadamente 95%."

Já para o procedimento simplificado o resultado encontrado fica:

$$R_m = 100,00013\text{mm} \pm 0,088\mu\text{m}$$

Cuja declaração é: "A declaração da expressão da incerteza para o bloco calibrado é baseada na incerteza padrão combinada multiplicada por um fator de abrangência  $k = 2$ , fornecendo um nível de confiança de aproximadamente 95%."

### **6.1.1 - Comparação dos resultados encontrados**

A seguir é apresentada a tabela 6.3 onde é possível visualizar os resultados da comparação entre o cálculo da incerteza em conformidade com o Guia, e aquele efetuado pelo procedimento simplificado proposto.

Na tabela é possível observar que a quantidade de cálculos realizados no procedimento proposto é menor que no do Guia e que as simplificações previstas no procedimento proposto não produz diferenças significativas. Isto pode ser visto nos resultados da incerteza padrão combinada que foram iguais para os dois procedimentos ( $0,004\mu\text{m}$ ) e na incerteza expandida cuja diferença de  $0,003\mu\text{m}$  não é significativa para a utilização do bloco-padrão na indústria.



Tabela 6.3 - Comparação das expressões e valores encontrados no estudo de caso 1

Comparação das expressões e valores encontrados no estudo de caso 1		
Cálculo conforme procedimento do Guia		Cálculo conforme procedimento simplificado proposto
Etapas	Expressões utilizadas e valores encontrados	Expressões utilizadas e valores encontrados
1	$l = l_p + \bar{d}$	$l = l_p + \bar{d}$
2	$l = f(l_p, d, \alpha_p, \theta, \delta\alpha, \delta\theta)$	$l = f(l_p, d)$
3	$u(l_p) = \frac{U_p}{2} = \frac{0,06}{2} = 0,03 \mu m$ $u(d) = \sqrt{1,094 \times 10^{-3}} = 0,033 \mu m$ $u(\alpha_p) = \frac{1,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}}{\sqrt{3}} = 0,87 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ $u(\theta) = \frac{0,1}{\sqrt{3}} = 0,06 \text{ } ^\circ\text{C}$ $u(\delta\alpha) = \frac{1,15 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}}{\sqrt{3}} = 0,66 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ $u(\delta\theta) = \frac{0,05 \text{ } ^\circ\text{C}}{\sqrt{3}} = 0,29 \text{ } ^\circ\text{C}$	$u(l_p) = \frac{U_p}{2} = \frac{0,06}{2} = 0,03 \mu m$ $u(d) = \sqrt{1,094 \times 10^{-3}} = 0,033 \mu m$
4	Considerado não-correlacionado	Considerado não-correlacionado
5	$l = l_p + \bar{d}$ $l = 100,00002 + 0,00011$ $l = 100,00013 \text{ mm}$	$l = l_p + \bar{d}$ $l = 100,00002 + 0,00011$ $l = 100,00013 \text{ mm}$
6	$u_c^2(l) = u^2(l_p) + u^2(d) + l_p^2 \theta^2 u^2(\delta\alpha) + l_p^2 \alpha_p^2 u^2(\delta\theta)$ $u_c(l) = \sqrt{1,989 \times 10^{-3}} = 0,044 \mu m$	$u_c^2(l) = u^2(l_p) + u^2(d)$ $u_c(l) = \sqrt{1,989 \times 10^{-3}} = 0,044 \mu m$

Tabela 6.3 - Comparação das expressões e valores encontrados no estudo de caso 1 (continuação)

Comparação das expressões e valores encontrados no estudo de caso 1		
Cálculo conforme procedimento do Guia		Cálculo conforme procedimento simplificado proposto
Etapas	Expressões utilizadas e valores encontrados	Expressões utilizadas e valores encontrados
7	$V_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}}$ $v_{eff}(d) = \frac{[u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2)]^2}{\frac{u^4(\bar{d})}{v(\bar{d})} + \frac{u^4(d_1)}{v(d_1)} + \frac{u^4(d_2)}{v(d_2)}} = \frac{(0,033\mu m)^4}{\frac{(0,006\mu m)^4}{2} + \frac{(0,023\mu m)^4}{5} + \frac{(0,023\mu m)^4}{5}} = 10,5$ $v_{eff}(l) = \frac{(0,044\mu m)^4}{\frac{(0,03\mu m)^4}{18} + \frac{(0,033\mu m)^4}{10} + \frac{(6,0 \times 10^{-9}\mu m)^4}{50} + \frac{(3,33 \times 10^{-8}\mu m)^4}{2}} =$ $v_{eff}(l) = 23,0$ $U_{95} = 2,07 \times 0,044\mu m = 0,091\mu m$	$U = 2 \times 0,044\mu m = 0,088\mu m$
8	$Rm = Vm \pm U$ $Rm = 100,00013mm \pm 0,091\mu m$	$Rm = Vm \pm U$ $Rm = 100,00013mm \pm 0,088\mu m$

## 6.2 - Cálculo de Incerteza da Calibração de Micrômetro Externo

A discussão do cálculo de incerteza do estudo de caso será apresentada de acordo com a seguinte estratégia. Inicialmente o cálculo será apresentado de acordo com as recomendações do Guia, seguindo-se a mesma análise de acordo com o procedimento simplificado proposto. A análise comparativa dos procedimentos será então apresentada, permitindo avaliar comparativamente os procedimentos e os resultados, em cada uma das suas etapas. Esta estratégia é detalhada nos itens a seguir.

Com o objetivo de mostrar quais os fatores de influência envolvidos na medição do micrômetro, o sistema de medição está demonstrado a seguir na figura 6.2. Conforme pode ser visto na figura 6.2, o bloco padrão de referência é colocado entre as faces de medição do micrômetro e é feita a leitura da medida encontrada.

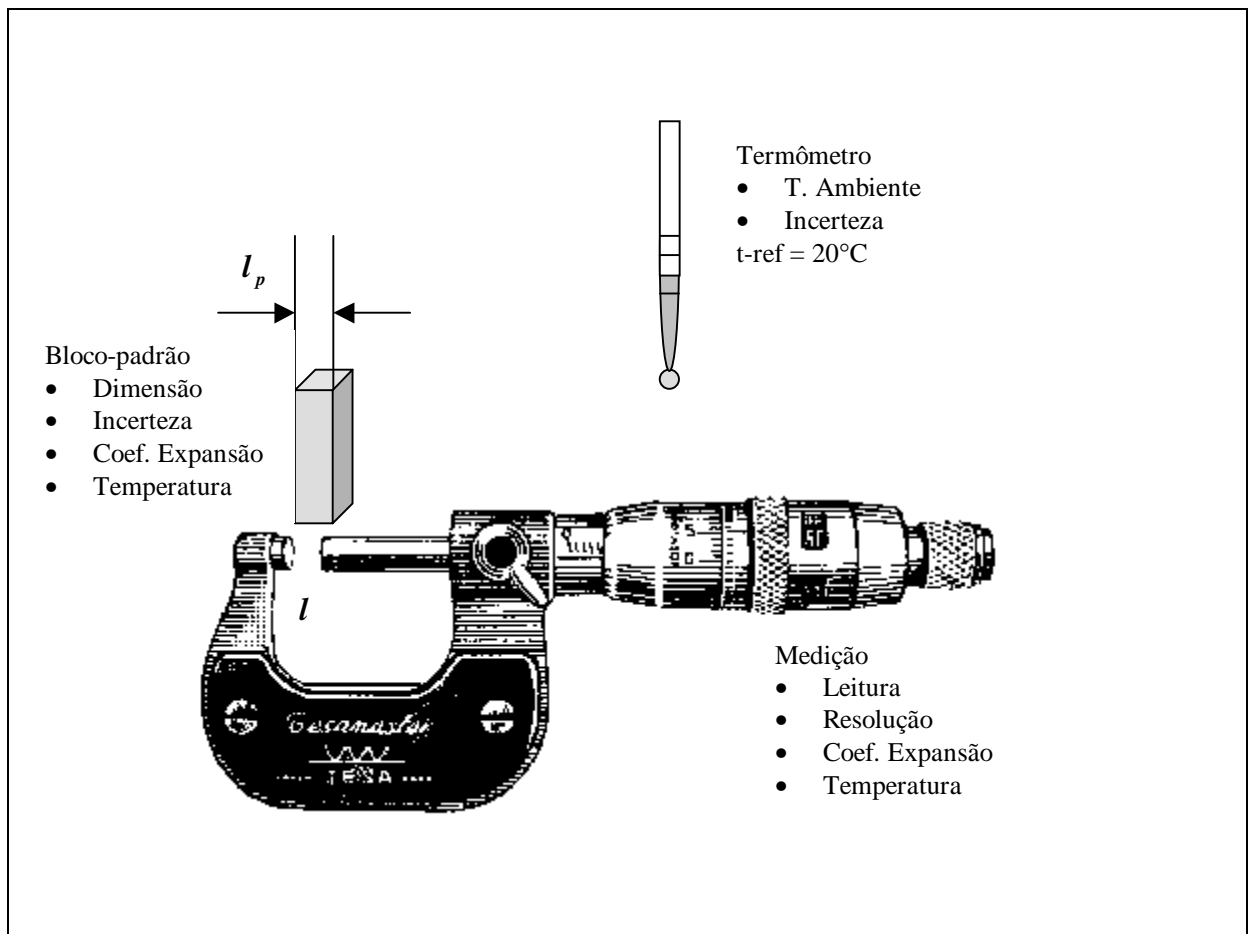


Figura 6.2 - Diagrama esquemático do sistema de calibração do micrômetro

Na calibração do bloco, cujo sistema de medição é representado esquematicamente pela figura 6.2, foram colhidos os seguintes dados:

- Padrão: Blocos-padrões de referência com as seguintes características:
  - Dimensões: 2,5 - 5,1 - 7,7 - 10,3 - 12,9 - 15,0 - 17,6 - 20,2 - 22,8 - 25,0
  - Incerteza do bloco-padrão  $U_P$ : 0,12  $\mu$ m.
  - Material: Aço
  - Coeficiente de expansão térmica ( $\alpha$ ):  $11,5 \times 10^{-6} \pm 10\%$ .
  
- Mensurando: Micrômetro Externo com as seguintes características.
  - Capacidade: 0 a 25 mm
  - Resolução: 0,001 mm
  - Material: Aço
  - Coeficiente de expansão térmica ( $\alpha$ ):  $11,5 \times 10^{-6} \pm 10\%$ .
  
- Termômetro digital para o ambiente de medição
  - Incerteza do termômetro ( $U_T$ ):  $\pm 0,21^\circ\text{C}$ .
  
- Termômetro digital sem contato
  - Incerteza do termômetro digital ( $U_{TD}$ ):  $\pm 0,05^\circ\text{C}$
  
- Local de ensaio
  - Temperatura durante a medição: 20,5 a 20,7  $^\circ\text{C}$ .
  
- Temperatura entre o bloco e o micrômetro
  - A diferença de temperatura entre o bloco padrão e o micrômetro foi de 0,4 $^\circ\text{C}$ ,
  
- Resultado das medições do micrômetro conforme tabela 6.4. a seguir.

Tabela 6.4 - Resultado das medições do micrômetro

Comprimento do Bloco ( mm )	Indicações do Micrômetro		
	1	2	3

<b>25,000</b>	0,001	0,001	0,000
---------------	-------	-------	-------

O cálculo da incerteza será apresentado por etapas de acordo com os oito passos do procedimento do Guia (ABNT/INMETRO, 1998).

**Etapa 1** - Expresse, matematicamente, a relação entre o mensurando  $Y$  e as grandezas de entrada  $X_i$  das quais  $Y$  depende:  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$ . A função  $f$  deverá conter cada grandeza, incluindo todas as correções e fatores de correção, que podem contribuir com um componente de incerteza, significativo para o resultado de medição.

Segundo o procedimento do Guia, num sistema de medição da calibração de um micrômetro, uma primeira fonte de incerteza que deve ser levada em consideração é a variação entre a temperatura do ambiente da medição e a temperatura de referência ( $t_{ref} = 20^\circ C$ ).

Dessa forma temos:

$$\theta = t - t_{ref} \quad (6.30)$$

Assim o comprimento entre as faces de medição do micrômetro à temperatura  $\theta$  é representado por:

$$l\{\theta\} = l(1 + \alpha\theta) \quad (6.31)$$

Onde:

$l$  é o comprimento entre as faces de medição do micrômetro (abertura do micrômetro) na temperatura de referência.

$\alpha$  é o coeficiente de dilatação térmica do material do micrômetro.

Na calibração do micrômetro a diferença  $d$  entre o comprimento da abertura do micrômetro e o comprimento do bloco-padrão à temperatura  $\theta$  é:

$$\begin{aligned} d &= l\{\theta\} - l_p\{\theta_p\} \\ d &= l(1 + \alpha\theta) - l_p(1 + \alpha_p\theta_p) \end{aligned} \quad (6.32)$$

Onde:  $l$  é o comprimento entre as faces de medição do micrômetro (comprimento de abertura do micrômetro) à temperatura de referência (20°C);

$l_p$  é o comprimento do bloco-padrão a 20°C, na forma dada em seu certificado de calibração;

$\alpha$  e  $\alpha_p$  são os coeficientes de expansão térmica do micrômetro e do bloco-padrão;

$\theta$  e  $\theta_p$  são os desvios na temperatura de cada elemento, com relação à temperatura de referência de 20°C.

A expressão (6.32) pode ser trabalhada isolando o comprimento do bloco calibrado, então:

$$l = \frac{l_p (1 + \alpha_p \theta_p) + d}{(1 + \alpha \theta)} \quad (6.33)$$

A expressão 6.3 pode ser aproximada por uma função polinomial, substituindo  $(1 + \alpha \theta)^{-1}$  pela sua expansão binomial :  $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots (x^2 < 1)$  (Decker/Pekelsky, 1995). Negligenciando os termos de maior ordem no polinômio, e restando somente os termos significantes de primeira ordem, temos:

$$l \approx d + l_p (1 + \alpha_p \theta_p - \alpha \theta) \quad (6.34)$$

Se a diferença de temperatura ( $\delta\theta$ ) entre o micrômetro e o bloco-padrão é escrita como  $\delta\theta = \theta - \theta_p$ , a equação (6.47) torna-se:

$$l = d + l_p (1 + \alpha_p \theta_p - \alpha \delta\theta - \alpha \theta_p) \quad (6.35)$$

Segue-se da equação (6.33) que a estimativa do valor do mensurando (medida  $l$ ) pode ser obtida por:

$$l = l_p + d \quad (6.36)$$

Onde  $l_p$  é o comprimento do bloco-padrão a 20°C, na forma dada em seu certificado de calibração e  $d$  estimado pela média aritmética de 3 observações ( $n = 3$ ) repetidas e independentes.

Segundo o procedimento simplificado proposto, as expressões (6.30), (6.31), (6.32), (6.33) (6.34) e (6.35) desaparecem devido a não utilização do coeficiente de expansão térmica e da temperatura.

Assim sendo, somente a expressão (6.36) é utilizada no procedimento simplificado que fica:

**Etapa 2** - Determine  $x_i$  que é o valor estimado da grandeza de entrada  $X_i$ , seja com base em análise estatística de uma série de observações ou por outros meios.

Conforme o procedimento do Guia, da expressão (6.35) é possível listar todas as grandezas ( $x_i$ ), possibilitando a modelagem da expressão conforme (3.29).

$$l = f(l_p, d, \alpha_p, \alpha, \theta_p, \delta\theta) \quad (6.37)$$

Onde:

$$l_p = 25,00001 \text{ mm}$$

$$d = 1,0 \mu\text{m}; 1,0 \mu\text{m}; 0,0 \mu\text{m} \rightarrow \bar{d} = 0,67 \mu\text{m}$$

$$\alpha_p \text{ e } \alpha = 11,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C} \pm 10\%$$

$$\theta \text{ e } \theta_p = 20,5 \text{ a } 20,7^\circ\text{C}$$

$$\delta\theta = 0,4^\circ\text{C}$$

Já pelo procedimento simplificado, nesta etapa, somente parte da expressão (6.37) permanece pois o coeficiente de expansão térmica e a temperatura são desprezados. A expressão (6.7) fica:

$$l = f(l_p, d)$$

**Etapa 3** - Avalie a incerteza padrão  $u(x_i)$  de cada estimativa de entrada  $x_i$ . Para uma estimativa de entrada obtida através de análise estatística de uma série de observações, a incerteza padrão é avaliada como avaliação Tipo A da incerteza padrão. Para uma estimativa de entrada obtida por outros meios, a incerteza padrão  $u(x_i)$  é avaliada como descrito na avaliação Tipo B da incerteza padrão.

Em conformidade com o procedimento do Guia, tem-se as seguintes incertezas:

**a) Incerteza de calibração do padrão de referência,  $u(l_p)$**

O certificado de calibração traz como incerteza expandida do bloco-padrão a quantia  $U_p = 0,12\mu m$ , e informa que a mesma foi obtida para um fator de abrangência  $k = 2$ . Com isso, a incerteza padrão do mesmo pode ser obtida na forma:

$$u(l_p) = \frac{U_p}{2} = \frac{0,12}{2} = 0,06\mu m \quad (6.38)$$

**b) Incerteza da diferença medida no comprimento,  $u(d)$**

Foram realizadas 03 medições em condições de repetitividade e foram encontrados os seguintes valores:  $1,0\mu m$ ;  $1,0\mu m$ ;  $0,0\mu m$ .

De posse desses valores foi determinada a média pela equação (3.3) onde:

$$\bar{d} = \frac{1,0 + 1,0 + 0,0}{3} \quad (6.39)$$

$$\bar{d} = 0,67\mu m$$

Em seguida é calculada a variância amostral pela equação (3.7) onde:

$$s^2(d) = \frac{(1,0 - 0,67)^2 + (1,0 - 0,66)^2 + (0,0 - 0,66)^2}{3 - 1} \quad (6.40)$$

$$s^2(d) = 0,333\mu m$$

De posse da variância amostral é calculada a variância experimental da média pela expressão (3.17) onde:



$$s^2(\bar{d}) = \frac{0,333}{3} \quad (6.41)$$

$$s^2(\bar{d}) = 0,111 \mu m$$

Como a raiz quadrada positiva da variância experimental da média se chama desvio padrão experimental da média e constitui por definição a incerteza padrão, temos:

$$u(\bar{d}) = \sqrt{s^2(\bar{d})} = \sqrt{0,111} \quad (6.42)$$

$$u(\bar{d}) = 0,333 \mu m$$

Na incerteza da diferença medida no comprimento, estão presentes também as seguintes incertezas:

**b.1) Incerteza do paralelo ótico,  $u(p_o)$**

A medição do paralelismo foi efetuada usando um paralelo ótico com incerteza expandida igual a  $\pm 0,4 \mu m$  com um fator de abrangência  $k=2$ . Então a incerteza padrão é:

$$u p_o = \frac{0,4}{2} = 0,2 \mu m \quad (6.43)$$

**b.2) Incerteza do erro de paralelismo,  $u(e_{pa})$**

O erro de paralelismo encontrado no micrômetro ( $1,0 \mu m$ ) é um efeito sistemático que não há como ser corrigido durante a calibração. Por isso, o mesmo é tratado como um componente da incerteza. Então a incerteza padrão do erro de paralelismo é:

$$u(e_{pa}) = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577 \mu m \quad (6.44)$$

Nesse caso como não se sabe qual é o tipo de distribuição do erro, foi utilizado a distribuição retangular ou uniforme.

**b.3) Incerteza do plano ótico,  $u(pl_o)$**

A medição da planeza foi efetuada usando um plano ótico com incerteza expandida igual a  $\pm 0,2 \mu m$  com um fator de abrangência  $k = 2$ . Então a incerteza padrão é:

$$u_{pl_o} = \frac{0,2}{2} = 0,1 \mu m \quad (6.45)$$

**b.4) Incerteza do erro de planeza,  $u(e_{pl})$**

O maior erro de planeza encontrado no micrômetro ( $1,0 \mu m$ ) é um efeito sistemático que não há como ser corrigido durante a calibração. Por isso, o mesmo é tratado como um componente da incerteza. Então a incerteza padrão do erro de paralelismo é:

$$u(e_{pl}) = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577 \mu m \quad (6.46)$$

Nesse caso como também não se sabe qual é o tipo de distribuição do erro, foi utilizado a distribuição retangular ou uniforme.

**b.5) Incerteza da resolução do micrômetro,  $u(r_m)$ .**

O micrômetro calibrado tem resolução de  $1,0 \mu m$  e é de leitura analógica. Sendo de leitura analógica, o valor lido pode estar em qualquer lugar no espaço de  $1,0 \mu m$  representando assim uma distribuição retangular.

$$u(r_m) = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577 \mu m \quad (6.47)$$

A contribuição total é obtida pela soma das variâncias estimadas, devidas a estes efeitos que fica:

$$\begin{aligned}
u^2(d) &= u^2(\bar{d}) + u^2(p_o) + u^2(e_{pa}) + u^2(pl_o) + u^2(e_{pl}) + u^2(r_m) \\
u^2(d) &= 0,333^2 + 0,2^2 + 0,577^2 + 0,1^2 + 0,577^2 + 0,577^2 \\
u(d) &= \sqrt{1,159} = 1,07 \mu m
\end{aligned} \tag{6.48}$$

**c) Incerteza do coeficiente de expansão térmica do padrão,  $u(\alpha_p)$**

O coeficiente de expansão térmica do padrão é assumido  $\alpha_p = 11,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  com uma incerteza representada por uma distribuição retangular com limites  $\pm 1,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . A incerteza padrão conforme a equação (3.21) é então:

$$u(\alpha_p) = \frac{1,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}}{\sqrt{3}} = 0,87 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \tag{6.49}$$

**d) Incerteza do desvio de temperatura do bloco calibrado,  $u(\theta)$**

A temperatura do ambiente do ensaio durante a calibração foi de 20,5 a 20,7°C que considerando a temperatura média (20,6°C) em comparação com a temperatura de 20°C resulta em 0,6°C. Como nesse caso, a temperatura ambiente pode estar por toda parte dentro do intervalo de 0,6°C, temos uma distribuição uniforme cuja incerteza padrão conforme a equação (3.23) é:

$$u(\theta) = \frac{0,6}{\sqrt{3}} = 0,34 \text{ }^\circ\text{C} \tag{6.50}$$

**e) Incerteza do coeficiente de expansão térmica do micrômetro,  $u(\alpha)$**

O coeficiente de expansão térmica do padrão é assumido  $\alpha = 11,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  com uma incerteza representada por uma distribuição retangular com limites  $\pm 1,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . A incerteza padrão conforme a equação (3.21) é então:

$$u(\alpha) = \frac{1,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}}{\sqrt{3}} = 0,87 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \tag{6.51}$$

**f) Incerteza da diferença nas temperaturas dos calibradores,  $u(\delta\theta)$**

As temperaturas do bloco-padrão e do micrômetro tem uma diferença de 0,4°C. Novamente, igual probabilidade para as temperaturas em qualquer lugar do intervalo

é suposta (distribuição retangular ou uniforme), chegando-se a seguinte incerteza padrão.

$$u(\delta\theta) = 0,4 \text{ } ^\circ\text{C} / \sqrt{3} = 0,23 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (6.52)$$

Nesta etapa, a única simplificação do procedimento proposto, perante o procedimento do Guia, é a utilização da distribuição retangular quando não for conhecida a distribuição ideal para representar a fonte de incerteza. Como no procedimento simplificado não foram utilizados; a diferença de temperatura  $\delta\theta$  e o coeficiente de expansão térmica  $\alpha$ , por estarem ambos nos limites de variação previstos para sua desconsideração, as incertezas do coeficiente de expansão térmica  $u(\alpha_p)$ , do desvio de temperatura do bloco calibrado  $u(\theta)$ , da diferença nos coeficientes de expansão  $u(\delta\alpha)$  e a da diferença nas temperaturas dos calibradores  $u(\delta\theta)$ , também foram desconsideradas.

**Etapa 4** - Avalie as covariâncias associadas com quaisquer estimativas de entrada que sejam correlacionadas.

Para este caso, independente do procedimento utilizado, não há covariância associada pois as estimativas de entrada não são correlacionadas.

**Etapa 5** - Calcule o resultado da medição, isto é, a estimativa  $y$  do mensurando  $Y$ , a partir da relação funcional  $f$ , utilizando como grandezas de entrada  $X_i$  as estimativas  $x_i$ , obtidas no passo 2.

Nesta etapa, o cálculo utilizado é o mesmo, independente do procedimento utilizado.

$$l = l_p + \bar{d} \quad (6.53)$$

$$l = 25,00001 + 0,00066$$

$$l = 25,00067 \text{ mm}$$

**Etapa 6** - Determine a incerteza padrão combinada  $u_c(y)$  do resultado da medição  $y$ , a partir das incertezas padrão e covariâncias associadas com as estimativas de entrada. Se a medição determina, simultaneamente, mais de uma grandeza de saída, calcule suas covariâncias.

Conforme o procedimento do Guia, como as estimativas de entrada não são correlacionadas, a incerteza padrão combinada  $u_c(l)$  de  $l$  é obtida aplicando-se a equação (3.30) mostrada novamente a seguir:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 u^2(x_i) \quad (6.54)$$

Uma vez que foi assumido  $\delta\alpha = 0$ , a aplicação da equação (6.37) à equação (6.67) resulta em:

$$u_c^2(l) = c_p^2 u^2(l_p) + c_d^2 u^2(d) + c_{\alpha_p}^2 u^2(\alpha_p) + c_{\alpha}^2 u^2(\alpha) + c_{\theta_p}^2 u^2(\theta) + c_{\delta\theta}^2 u^2(\delta\theta) \quad (6.55)$$

Resolvendo as derivadas parciais, tem-se:

$$\begin{aligned} c_p &= \partial f / \partial l_p = 1 + (\alpha_p \theta_p - \alpha \delta\theta - \alpha \theta_p) \\ c_d &= \partial f / \partial d = 1 \\ c_{\alpha_p} &= \partial f / \partial \alpha_p = l_p \theta_p \\ c_{\alpha} &= \partial f / \partial \alpha = -l_p (\delta\theta + \theta_p) \\ c_{\theta_p} &= \partial f / \partial \theta_p = l_p (\alpha_p - \alpha) \\ c_{\delta\theta} &= \partial f / \partial \delta\theta = -l_p \alpha \end{aligned} \quad (6.56)$$

tem-se então a incerteza padrão combinada dada por:

$$\begin{aligned} u_c^2(l) &= (1 + \alpha_p \theta_p - \alpha \delta\theta - \alpha \theta_p)^2 u^2(l_p) + \\ &+ u^2(d) + l_p^2 \theta_p^2 u^2(\alpha_p) + l_p^2 (\delta\theta + \theta_p)^2 u^2(\alpha) + \\ &+ l_p^2 (\alpha_p - \alpha)^2 u^2(\theta_p) + l_p^2 \alpha^2 u^2(\delta\theta) \end{aligned} \quad (6.57)$$

Uma vez tecidas as considerações acerca das incertezas individuais, a incerteza padrão combinada  $u_c(l)$  é calculada pela equação (6.57), resultando na expressão mostrada a seguir.

$$\begin{aligned}
 u_c^2(l) &= (1 + 11,5 \times 10^{-6} \times 20,6 - 11,5 \times 10^{-6} \times 0,4 - 11,5 \times 10^{-6} \times 20,6)^2 \times (0,06)^2 + \\
 &+ (1,07)^2 + 25^2 \times 20,6^2 \times (0,87 \times 10^{-6})^2 + 25^2 \times (0,4 + 20,6)^2 \times (0,87 \times 10^{-6})^2 \\
 &+ 25^2 \times (11,5 \times 10^{-6} - 11,5 \times 10^{-6})^2 \times 0,34^2 + 25^2 \times (11,5 \times 10^{-6})^2 \times 0,23^2 \\
 \\
 u_c^2(l) &= 3,6 \times 10^{-3} + 1,1449 + 2,0 \times 10^{-7} + 2,1 \times 10^{-7} + 0 + 4,37 \times 10^{-9} \\
 u_c(l) &= \sqrt{1,1485} = 1,07 \mu m \tag{6.58}
 \end{aligned}$$

No procedimento simplificado como o coeficiente de expansão térmica e nem a temperatura foram levados em consideração, a expressão (6.22) é alterada resultando na expressão mostrada a seguir.

$$u_c^2(l) = c_p^2 u^2(l_p) + c_d^2 u^2(d)$$

Já as derivadas parciais, pelo procedimento simplificado, ficam:

$$c_p = \partial f / \partial l_p = 1$$

$$c_d = \partial f / \partial d = 1$$

Com isso, a incerteza padrão combinada teve sua expressão reduzida a::

$$u_c^2(l) = u^2(l_p) + u^2(d)$$

Tendo o seguinte resultado:

$$u_c^2(l) = u^2(l_p) + u^2(d)$$

$$u_c^2(l) = 3,6 \times 10^{-3} + 1,1449$$

$$u_c(l) = \sqrt{1,1489} = 1,07 \mu m$$

Nesse caso, embora as incertezas padrão envolvidas sejam diferentes, o resultado não foi alterado significativamente dentro do número de algarismos significativos adotados no cálculo.

Para melhor visualização das fontes de incertezas, bem como dos valores envolvidos nos dois procedimentos, são apresentadas a seguir as planilhas de incertezas tabelas (6.5) e (6.6)

Tabela 6.5 - Planilha de incerteza do procedimento de cálculo conforme o Guia:

Grandeza $X_i$	Estimativa $x_i$	Incerteza padrão $u(x_i)$	Distribuição de probabilidade	Coefficiente de sensibilidade $c_i$	Contribuição para a incerteza $u(y_i)$
$l_p$	25,00001mm	0,06 $\mu$ m	Normal	$1 + (\alpha_p \theta_p - \alpha \delta\theta - \alpha \theta_p)$	0,06 $\mu$ m
$d$	0,00066mm	1,07 $\mu$ m	-	1,0	1,07 $\mu$ m
$\alpha_p$	$1,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$0,87 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	Retangular	$l_p \theta_p$	0
$\theta$	0,6 $^\circ\text{C}$	0,34 $^\circ\text{C}$	Retangular	$l_p (\alpha_p - \alpha)$	0
$\alpha$	$1,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$0,87 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	Retangular	$-l_p (\delta\theta + \theta_p)$	$6,0 \times 10^{-9} \mu\text{m}$
$\delta\theta$	0,4 $^\circ\text{C}$	0,23 $^\circ\text{C}$	Retangular	$-l_p \alpha$	$3,33 \times 10^{-8} \mu\text{m}$
$l$	25,00068mm				2,19 $\mu$ m

Tabela 6.6 - Planilha de incerteza do procedimento de cálculo conforme o procedimento simplificado:

Grandeza $X_i$	Estimativa $x_i$	Incerteza padrão $u(x_i)$	Distribuição de probabilidade	Coefficiente de sensibilidade $c_i$	Contribuição para a incerteza $u(y_i)$
$l_p$	25,00001mm	0,06 $\mu$ m	Normal	1,0	0,06 $\mu$ m
$d$	0,00066mm	1,07 $\mu$ m	-	1,0	1,07 $\mu$ m
$l$	25,00068mm				2,14 $\mu$ m

**Etapa 7** - Se é necessário fornecer uma incerteza expandida  $U$ , cujo propósito é fornecer um intervalo  $y - U$  a  $y + U$  com o qual se espera abranger uma extensa fração da distribuição dos valores que possam razoavelmente ser atribuídos ao mensurando  $Y$ , multiplique a incerteza padrão combinada  $u_c(y)$  por um fator de abrangência  $k$ , tipicamente na faixa de 2 a 3, para obter  $U = k u_c(y)$ . Selecione  $k$  com base no nível de confiança requerido do intervalo.

Segundo o Guia, para o cálculo da incerteza expandida é necessário inicialmente calcular os graus de liberdade associados à expressão da incerteza padrão combinada  $u_c(y)$ . Para isso deve-se considerar cada elemento componente de  $u_c(y)$ , gerando as seguintes considerações:

Para a Incerteza de calibração do padrão  $u(l_p)$  como o certificado de calibração estabelece que seu fator de abrangência é 2, os graus de liberdade efetivos é igual a  $\infty$  (ABNT/INMETRO, 1998). A incerteza da diferença medida nos comprimentos  $u(d)$  é ponderada com base nas considerações que a mesma foi obtida de três observações repetidas, assim os graus de liberdade de  $u(\bar{d})$  são portanto  $\nu(\bar{d}) = 3 - 1 = 2$ . Para os graus de liberdade dos outros componentes de  $u(d)$ , os graus de liberdade efetivos é igual 2 pois os mesmos apresentaram distribuições retangulares e se julga que seus valores de incerteza padrão são confiáveis em somente cerca de 50%.

$$V_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \quad (6.59)$$

$$\nu_{eff}(d) = \frac{[u^2(\bar{d}) + u^2(p_o) + u^2(e_{pa}) + u^2(pl_o) + u^2(e_{pl}) + u^2(r_m)]^2}{\frac{u^4(\bar{d})}{\nu(\bar{d})} + \frac{u^4(p_o)}{\nu(p_o)} + \frac{u^4(e_{pa})}{\nu(e_{pa})} + \frac{u^4(pl_o)}{\nu(pl_o)} + \frac{u^4(e_{pl})}{\nu(e_{pl})} + \frac{u^4(r_m)}{\nu(r_m)}}$$

$$\nu_{eff}(d) = \frac{[0,333^2 + 0,2^2 + 0,577^2 + 0,1^2 + 0,577^2 + 0,577^2]^2}{\frac{0,333^4}{2} + \frac{0,2^4}{2} + \frac{0,577^4}{2} + \frac{0,1^4}{2} + \frac{0,577^4}{2} + \frac{0,577^4}{2}} = 34,5$$



Já no cálculo da incerteza da diferença na temperatura dos instrumentos  $u(\delta\theta)$  o intervalo estimado de  $\pm 0,05^\circ\text{C}$  para a diferença de temperatura  $\delta\theta$  é assumida confiável somente a 50%. Tal hipótese fornece  $v(\delta\theta) = 2$  para este parâmetro.

O cálculo de  $v_{eff}(l)$  é análogo ao cálculo de  $v_{eff}(d)$  ilustrado pela expressão (6.74) abaixo. Assim, da equação (6.73) e dos graus de liberdade  $v$  acima discutidos tem-se:

$$v_{eff}(l) = \frac{u_c^4(l)}{\frac{u^4(l_p)}{v(l_p)} + \frac{u^4(d)}{v(d)} + \frac{u^4(\alpha_p)}{v(\alpha_p)} + \frac{u^4(\theta)}{v(\theta)} + \frac{u^4(\alpha)}{v(\alpha)} + \frac{u^4(\delta\theta)}{v(\delta\theta)}}$$

$$v_{eff}(l) = \frac{(1,074)^4}{\frac{(0,06)^4}{\infty} + \frac{(1,07)^4}{34} + \frac{(0,87 \times 10^{-6})^4}{2} + \frac{0,34^4}{2} + \frac{(0,87 \times 10^{-6})^4}{2} + \frac{0,23^4}{2}}$$

$$v_{eff}(l) = 28,4 \tag{6.60}$$

Para obter a incerteza expandida requerida este valor deve ser inicialmente truncado até o maior inteiro inferior ao valor calculado de 28,4 ou seja,  $v_{eff}(l) = 28$ . Tomando o correspondente  $k_{95}$  da tabela t-Student (anexo 2),  $t_{95}(28) = 2,048$ , a incerteza expandida  $U_{95} = t_{95}(28)u_c(l)$  resulta em:

$$U_{95} = 2,05 \times 1,07 \mu\text{m} = 2,19 \mu\text{m} \tag{6.61}$$

Nesta etapa, conforme o procedimento do Guia, os graus de liberdade efetivos e os níveis de confiança para a determinação do fator de abrangência são levados em consideração. Já no procedimento proposto, isto não ocorre pois o mesmo não utiliza os graus de liberdade efetivos, considerando sempre o fator de abrangência  $k = 2$ . Desta forma, as expressões 6.59 e 6.60 não são utilizadas e o resultado da incerteza expandida para cada procedimento foi:

Para o procedimento conforme o Guia, o resultado foi conforme a expressão (6.61) onde foi tomado o correspondente  $k_{95}$  para  $t_{95}(28) = 2,048$  cujo resultado foi:

$$U_{95} = 2,05 \times 1,07 \mu m = 2,19 \mu m \quad (6.61)$$

Já para o procedimento simplificado onde deve ser utilizado sempre  $k = 2$ , o resultado foi:

$$U = k \times u_c(l)$$

$$U = 2 \times 1,07 \mu m = 2,14 \mu m$$

Nesta etapa pode ser observado que os valores da incerteza expandida diferem, mas a variação de  $0,05 \mu m$  pode ser considerada desprezível para a utilização de um micrômetro cuja resolução é de  $1,0 \mu m$ .

**Etapa 8** - Relate o resultado da medição  $y$  juntamente com sua incerteza padrão  $u_c(y)$  ou incerteza expandida  $U$ , usando um dos formatos recomendados. Descreva, como  $y$  e  $u_c(y)$  ou  $U$  foram obtidos.

O certificado de calibração especifica o comprimento do bloco-padrão a  $20^\circ C$  em  $l_p = 25,00001$  mm. A média aritmética  $\bar{d}$  de três observações repetidas do micrômetro é de  $0,67 \mu m$ . Assim, como  $l = l_p + \bar{d}$ , o comprimento  $l$  do bloco calibrado a  $20^\circ C$  é  $25,00068$  mm. De acordo com o Guia, o resultado final da medição pode ser estabelecido como  $l = 25,00068$  mm, com uma incerteza padrão combinada  $u_c = 1,07 \mu m$ .

Dessa forma, o resultado final do cálculo da incerteza para o micrômetro calibrado de acordo com a equação (3.39) novamente representada abaixo fica:

$$Rm = Vm \pm U \text{ (unidade)} \quad (6.62)$$

$$R_m = 25,00068\text{mm} \pm 2,19\mu\text{m}$$

Cuja declaração é: "A declaração da expressão da incerteza para o micrômetro é baseada na incerteza padrão combinada multiplicada por um fator de abrangência  $k = 2,05$ , fornecendo um nível de confiança de aproximadamente 95%."

Já para o procedimento simplificado o resultado encontrado fica

$$R_m = 25,00068\text{mm} \pm 2,14\mu\text{m}$$

Cuja declaração é: "A declaração da expressão da incerteza para o micrômetro é baseada na incerteza padrão combinada multiplicada por um fator de abrangência  $k = 2$ , fornecendo um nível de confiança de aproximadamente 95%."

### **6.2.1 - Comparação dos resultados encontrados**

A seguir é apresentada a tabela 6.7 onde é possível visualizar os resultados da comparação entre o cálculo da incerteza em conformidade com o Guia, e aquele efetuado pelo procedimento simplificado proposto.

Conforme pode ser visto na tabela, o cálculo realizado conforme o procedimento simplificado não produziu diferença significativa entre os valores encontrados nos dois procedimentos. Na incerteza padrão combinada, o resultado foi o mesmo  $1,07\mu\text{m}$ , e na incerteza expandida a diferença de  $0,05\mu\text{m}$  não é significativa para a utilização do micrômetro, que conforme já dito, tem resolução de  $1,0\mu\text{m}$ .

Tabela 6.7 - Comparação das expressões e valores encontrados no estudo de caso 2

Comparação das expressões e valores encontrados no estudo de caso 2		
Cálculo conforme procedimento do Guia		Cálculo conforme procedimento simplificado proposto
Etapas	Expressões utilizadas e valores encontrados	Expressões utilizadas e valores encontrados
1	$l = l_p + \bar{d}$	$l = l_p + \bar{d}$
2	$l = f(l_p, d, \alpha_p, \alpha, \theta_p, \delta\theta)$	$l = f(l_p, d)$
3	$u(l_p) = \frac{U_p}{2} = \frac{0,12}{2} = 0,06 \mu m$ $u(d) = \sqrt{1,159} = 1,07 \mu m$ $u(\alpha_p) = \frac{1,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}}{\sqrt{3}} = 0,87 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$ $u(\theta) = \frac{0,6}{\sqrt{3}} = 0,34 \text{ } ^\circ C$ $u(\alpha) = \frac{1,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}}{\sqrt{3}} = 0,87 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$ $u(\delta\theta) = \frac{0,4 \text{ } ^\circ C}{\sqrt{3}} = 0,23 \text{ } ^\circ C$	$u(l_p) = \frac{U_p}{2} = \frac{0,12}{2} = 0,06 \mu m$ $u(d) = \sqrt{1,159} = 1,07 \mu m$
4	Considerado não-correlacionado	Considerado não-correlacionado
5	$l = l_p + \bar{d}$ $l = 25,00001 + 0,00066$ $l = 25,00067 mm$	$l = l_p + \bar{d}$ $l = 25,00001 + 0,00066$ $l = 25,00067 mm$
6	$u_c^2(l) = c_p^2 u^2(l_p) + c_d^2 u^2(d) + c_{\alpha_p}^2 u^2(\alpha_p) + c_\alpha^2 u^2(\alpha) + c_{\theta_p}^2 u^2(\theta) + c_{\delta\theta}^2 u^2(\delta\theta)$ $u_c(l) = \sqrt{1,1489 \mu m} = 1,07 \mu m$	$u_c^2(l) = u^2(l_p) + u^2(d)$ $u_c(l) = \sqrt{1,1489 \mu m} = 1,07 \mu m$

Tabela 6.7 - Comparação das expressões e valores encontrados no estudo de caso 2 (continuação)

Comparação das expressões e valores encontrados no estudo de caso 2		
Cálculo conforme procedimento do Guia		Cálculo conforme procedimento simplificado proposto
Etapas	Expressões utilizadas e valores encontrados	Expressões utilizadas e valores encontrados
7	$v_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}}$ $v_{eff}(d) = \frac{[0,333^2 + 0,2^2 + 0,577^2 + 0,1^2 + 0,577^2 + 0,577^2]^2}{\frac{0,333^4}{2} + \frac{0,2^4}{2} + \frac{0,577^4}{2} + \frac{0,1^4}{2} + \frac{0,577^4}{2} + \frac{0,577^4}{2}} = 34,5$ $v_{eff}(l) = \frac{(1,074)^4}{\frac{(0,06)^4}{\infty} + \frac{(1,07)^4}{34} + \frac{(0,87 \times 10^{-6})^4}{2} + \frac{0,34^4}{2} + \frac{(0,87 \times 10^{-6})^4}{2} + \frac{0,23^4}{2}}$ $v_{eff}(l) = 28,4$ $U_{95} = 2,05 \times 1,07 \mu m = 2,19 \mu m$	$U = 2 \times 1,07 \mu m = 2,14 \mu m$
8	$Rm = Vm \pm U$ $Rm = 25,00068mm \pm 2,19 \mu m$	$Rm = Vm \pm U$ $Rm = 25,00068mm \pm 2,14 \mu m$

### 6.3 - Comprovação da simplificação utilizada no procedimento simplificado proposto

Conforme visto no capítulo 5 subitem 5.6, o procedimento simplificado proposto apresenta algumas simplificações. Entre elas estão a não utilização do coeficiente de temperatura, caso a diferença entre o padrão de referência e o mensurando seja de até  $5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , a não utilização da temperatura caso a diferença entre a temperatura ambiente na ocasião da calibração e a temperatura de referência seja de até  $2 \text{ } ^\circ\text{C}$  e o limite de abrangência do procedimento para equipamentos de até  $1000\text{mm}$  mm de comprimento a ser calibrado.

A comprovação de que estas simplificações não trazem diferenças significativas para o uso do procedimento simplificado serão vistas com os 3 exemplos a seguir, onde inicialmente é apresentado o cálculo da incerteza visto no estudo de caso 1, na seqüência é apresentado o estudo de caso 1 com alterações na temperatura para  $2 \text{ } ^\circ\text{C}$  e no comprimento do bloco padrão para  $1000\text{mm}$  e finalmente é apresentado o cálculo de incerteza onde o coeficiente de expansão térmica do bloco é alterado para  $7,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  que em relação ao bloco calibrado apresenta uma diferença de  $5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , com variação de temperatura de  $2 \text{ } ^\circ\text{C}$  e comprimento de  $1000\text{mm}$ .

#### Exemplo 1 - Incerteza padrão combinada e incerteza expandida do estudo de caso 1 conforme procedimento do Guia

Conforme visto em 6.1, o resultado da incerteza padrão combinada foi:

$$u_c^2(l) = u^2(l_p) + u^2(d) + l_p^2 \theta^2 u^2(\delta\alpha) + l_p^2 \alpha_p^2 u^2(\delta\theta) \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} u_c^2(l) &= (0,03)^2 + (0,033)^2 + \\ &+ (0,10\text{m})^2 (0,1 \text{ } ^\circ\text{C})^2 (0,66 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})^2 + \\ &+ (0,10\text{m})^2 (11,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})^2 (0,029 \text{ } ^\circ\text{C})^2 \\ &= (0,03 \mu\text{m})^2 + (0,033 \mu\text{m})^2 + (6,6 \times 10^{-9} \mu\text{m})^2 + (3,33 \times 10^{-8} \mu\text{m})^2 \end{aligned}$$

$$u_c(l) = \sqrt{1,989 \times 10^{-3} \mu\text{m}} = 0,044598 \mu\text{m} \quad (6.25)$$

E o da incerteza expandida foi:

$$U_{95} = 2,07 \times 0,044 \mu m = 0,092318 \mu m \quad (6.28)$$

**Exemplo 2 Incerteza padrão combinada e incerteza expandida do estudo de caso 1 conforme procedimento do Guia, com alteração do comprimento e da temperatura.**

Nesse caso foi utilizada a expressão (6.24), com alteração dos valores do comprimento de  $l_p = 100mm$  para  $l_p = 1000mm$  e o valor da temperatura de  $\theta = 0^\circ C$  para  $\theta = 2^\circ C$ .

Os resultados encontrados para a incerteza padrão combinada  $u_c(l)$  e incerteza expandida  $U$  são:

$$u_c^2(l) = u^2(l_p) + u^2(d) + l_p^2 \theta^2 u^2(\delta\alpha) + l_p^2 \alpha_p^2 u^2(\delta\theta) \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} u_c^2(l) &= (0,03)^2 + (0,033)^2 + \\ &+ (1m)^2 (2^\circ C)^2 (0,66 \times 10^{-6} \text{ }^\circ C^{-1})^2 + \\ &+ (1m)^2 (11,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ C^{-1})^2 (0,029^\circ C)^2 \\ &= (0,03 \mu m)^2 + (0,033 \mu m)^2 + (1,32 \times 10^{-6} \mu m)^2 + (3,335 \times 10^{-7} \mu m)^2 \\ u_c(l) &= \sqrt{1,989 \times 10^{-3} \mu m} = 0,044598 \mu m \end{aligned} \quad (6.63)$$

$$U_{95} = 2,07 \times 0,044 \mu m = 0,092318 \mu m \quad (6.64)$$

**Exemplo 3 - Incerteza padrão combinada e incerteza expandida do estudo de caso 1 conforme procedimento do Guia, com alteração no coeficiente de expansão térmica, temperatura e comprimento.**

Neste caso foram utilizadas as expressões abaixo que diferem das utilizadas no exemplo 1 acima, para atender a diferença de coeficiente de expansão térmica entre o padrão de referência e o bloco padrão calibrado.

$$u_c^2(l) = c_p^2 u^2(l_p) + c_d^2 u^2(d) + c_{\alpha_p}^2 u^2(\alpha_p) + c_\alpha^2 u^2(\alpha) + c_\theta^2 u^2(\theta) + c_{\delta\theta}^2 u^2(\delta\theta) \quad (6.65)$$

O desenvolvimento da expressão e o resultado da incerteza padrão são dados por:

$$\begin{aligned} u_c^2(l) = & (1 + \alpha_p \theta_p - \alpha \delta\theta - \alpha \theta_p)^2 u^2(l_p) + \\ & + u^2(d) + l_p^2 \theta_p^2 u^2(\alpha_p) + l_p^2 (\delta\theta + \theta_p)^2 u^2(\alpha) + \\ & + l_p^2 (\alpha_p - \alpha)^2 u^2(\theta_p) + l_p^2 \alpha^2 u^2(\delta\theta) \end{aligned} \quad (6.66)$$

$$\begin{aligned} u_c^2(l) = & (1 + 6,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \times 2 \text{ } ^\circ\text{C} - 11,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \times 0 - 11,5 \times 10^{-6} \times 2 \text{ } ^\circ\text{C})^2 \times (0,03)^2 + \\ & + (0,033)^2 + \\ & + (1\text{m})^2 \times (2 \text{ } ^\circ\text{C})^2 \times (0,87 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})^2 + (1)^2 \times (0 + 2)^2 \times (0,87 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})^2 + \\ & + (1)^2 \times (6,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} - 11,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})^2 \times (0,06)^2 + \\ & + (1)^2 \times (11,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1})^2 \times (0,029)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_c^2(l) = & (8,99982 \times 10^{-4}) + 1,089 \times 10^{-3} + 3,0276 \times 10^{-12} + 3,0276 \times 10^{-12} + \\ & + (9 \times 10^{-14}) + (1,11222 \times 10^{-13}) \end{aligned}$$

$$u_c(l) = \sqrt{1,988982 \times 10^{-3}} = 0,044598 \quad (6.67)$$

O resultado da incerteza expandida é:

$$U_{95} = 2,07 \times 0,044598 \mu\text{m} = 0,092318 \mu\text{m} \quad (6.68)$$

Para melhor visualização dos valores acima encontrados, os mesmos são apresentados na tabela 6.8 a seguir.

Tabela 6.8 - Comparação de resultados

Exemplo	Incerteza padrão combinada	Incerteza expandida
1	0,044598 $\mu\text{m}$	0,092318 $\mu\text{m}$
2	0,044598 $\mu\text{m}$	0,092318 $\mu\text{m}$



<b>3</b>	<b>0,044598<math>\mu m</math></b>	<b>0,092318<math>\mu m</math></b>
----------	-----------------------------------	-----------------------------------

Comparando-se os resultados dos exemplos apresentados na tabela acima, pode ser observado que o procedimento simplificado é passível de ser utilizado pois os valores limites usados na simplificação ( $5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ,  $2^\circ\text{C}$  e  $1000\text{mm}$ ) não alteraram significativamente os valores calculados com a utilização do procedimento em conformidade com o Guia.

## Capítulo 7

### **7 – Conclusões e Proposta de Trabalhos Futuros.**

Conforme enunciado nos primeiros capítulos deste trabalho, sua proposta envolveu objetivos gerais e específicos que buscaram desde a discussão histórica e conceitual da incerteza de medição até o esclarecimento de alguns dos seus importantes pontos teóricos. Tal abordagem culminou na proposição de um procedimento simplificado de seu cálculo.

É interessante observar pela discussão da evolução do tratamento da incerteza que os conceitos hoje difundidos pelos documentos internacionais se assemelham, como não poderia deixar de ser, aos conceitos clássicos que nortearam essas discussões ao longo dos anos. Isso reforça a excelente fundamentação teórica dos métodos hoje propostos, contrariando algumas correntes que tendem a acreditar em versões modificadas de procedimentos com aspectos inexplicáveis ou mesmo fora do alcance da maioria dos seus usuários.

Pela discussão apresentada tornou-se clara também a origem de algumas confusões conceituais, principalmente aquelas causadas por uma terminologia idêntica e pouco cuidadosa, utilizada em diferentes contextos para expressar conceitos diferentes sobre um mesmo tema. Destacam-se os conceitos de erros, incertezas, efeitos aleatórios e sistemáticos, além de incertezas tipos A e B

Alguns pontos interessantes do tratamento da incerteza também puderam ser esclarecidos, proporcionando ao usuário comum uma compreensão mais ampla e profunda sobre os procedimentos utilizados no dia a dia da indústria. Ressalta-se aqui a determinação das médias e variâncias das principais distribuições envolvidas, o cálculo dos coeficientes de correlação e sua implicação na dependência ou independência das variáveis, além da conceituação mais prática dos coeficientes de sensibilidade e fatores de abrangência. Outros pontos de maior profundidade

puderam ser indicados porém merecerão maior atenção em etapas futuras do presente trabalho. Destaca-se a expressão da incerteza padrão combinada cuja compreensão depende do Teorema do Limite Central, discussão ainda não trivial para um grande número de usuários. Dela decorre a combinação de diferentes distribuições de probabilidade através dos respectivos desvios padrão, limitantes de diferentes níveis de confiança, o que também não é uma discussão própria para o cotidiano da indústria.

O procedimento simplificado proposto para a expressão da incerteza em ambiente industrial também pode ser obtido sem perda de qualidade nos resultados e de acordo com os principais documentos normativos da atualidade.

Pelos resultados obtidos é possível concluir que, embora simplificado, o procedimento proposto não influencia significativamente os valores finais da incerteza padrão combinada ou o resultado da incerteza expandida. Os valores encontrados mostram que os valores das incertezas padrão calculadas são idênticos até o terceiro dígito significativo. Já as incertezas expandidas não apresentam tão marcante característica, porém não afetam a utilização do mensurando mesmo quando o padrão de referência e o mensurando estejam nas condições limites previstas no procedimento.

Embora com algumas limitações pelas próprias simplificações propostas, o procedimento pode ser utilizado num grande número de aplicações, uma vez que as mesmas são pequenas para tarefas rotineiras da metrologia dimensional na indústria.

Ao final deste desenvolvimento algumas conclusões puderam também ser delineadas, conforme ilustram os itens a seguir.

- Quanto à utilização do procedimento simplificado proposto deve ficar claro que o mesmo deve ser utilizado prioritariamente para metrologia dimensional no ambiente industrial. Isso porque é provável que na empresa existirão condições de avaliar o nível de confiabilidade do cálculo da incerteza pelo método simplificado, e compará-lo com as demandas dos processos e produtos. Outras aplicações da proposta deverão ser analisadas caso-a-caso.
- Desta forma, não se recomenda a priori que o procedimento proposto seja irrestritamente utilizado em outras atividades, como na prestação de serviços a terceiros, por não se ter conhecimento das condições de utilização dos resultados calculados.

- Os laboratórios prestadores de serviços devem calcular a incerteza segundo os procedimentos trazidos pelo Guia, por ser ele o mais importante documento sobre o tema que fornece orientação completas para abordagem do assunto. Apesar disso, recomenda-se a utilização das discussões teóricas aqui apresentadas como forma de esclarecimento dos conceitos quando aplicando os documentos normativos.

Como consequência deste desenvolvimento e das discussões aqui apresentadas, alguns pontos destacaram-se como objetos de investigações futuras.

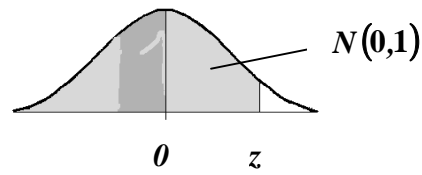
- Aprofundamento das discussões sobre a aplicação da convolução na expressão da incerteza padrão combinada, avaliando suas implicações e consequências na propagação de incertezas originadas de diferentes distribuições e probabilidade.
- Utilização de técnicas de análise de correlação múltipla como forma de analisar a dependência indireta de diversas variáveis de um experimento em relação a uma terceira.
- Comparação da expressão da incerteza de medição segundo o Guia com a análise do sistema de medição trazido pela normas QS 9000 em ampla utilização na indústria.
- Desenvolvimento de procedimentos simplificados para outras áreas da metrologia como meio de atendimento às demandas mais emergentes do cotidiano de diversas indústrias.
- Desenvolvimento de um software para cálculo de incerteza de medição, que oriente as simplificações pertinentes em cada caso e mantenha seus resultados em absoluta concordância conceitual com os principais documentos internacionais.

No encerramento do trabalho acredita-se que uma contribuição tenha sido deixada, não especificamente por conteúdos inovadores mas, ao invés disso, por uma discussão simples na apresentação, profunda nos conceitos e de grande aplicação na indústria.

## Anexo 1

### Anexo 1 - TABELA DISTRIBUIÇÃO Z

## Distribuição Z



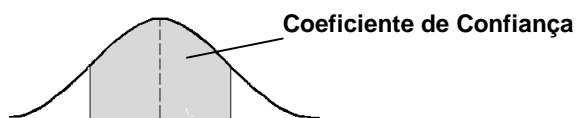
$$P(x \leq z) = \int_{-\infty}^z f(z) dz; \quad z = \frac{x - \mu}{\sigma}; \quad f(x) = N(\mu\sigma^2)$$

Z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
<b>0,00</b>	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
<b>0,10</b>	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
<b>0,20</b>	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
<b>0,30</b>	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
<b>0,40</b>	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
<b>0,50</b>	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
<b>0,60</b>	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
<b>0,70</b>	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
<b>0,80</b>	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
<b>0,90</b>	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
<b>1,00</b>	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
<b>1,10</b>	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
<b>1,20</b>	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
<b>1,30</b>	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
<b>1,40</b>	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
<b>1,50</b>	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
<b>1,60</b>	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
<b>1,70</b>	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
<b>1,80</b>	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
<b>1,90</b>	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
<b>2,00</b>	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
<b>2,10</b>	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
<b>2,20</b>	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
<b>2,30</b>	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
<b>2,40</b>	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
<b>2,50</b>	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
<b>2,60</b>	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
<b>2,70</b>	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
<b>2,80</b>	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
<b>2,90</b>	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
<b>3,00</b>	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
<b>3,10</b>	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
<b>3,20</b>	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
<b>3,30</b>	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
<b>3,40</b>	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997
<b>3,50</b>	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
<b>3,60</b>	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
<b>3,70</b>	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
<b>3,80</b>	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
<b>3,90</b>	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
<b>4,00</b>	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

## Anexo 2

### Anexo 2 - TABELA DISTRIBUIÇÃO t - STUDENT

## Distribuição t- Student



$$P[|t| \geq t(\Phi, \alpha)] = \alpha ; t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Coeficiente de Confiança						
Duas caudas	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
<b>g.l. = 1</b>	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	636,578
<b>2</b>	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,600
<b>3</b>	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
<b>4</b>	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
<b>5</b>	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
<b>6</b>	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
<b>7</b>	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
<b>8</b>	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
<b>9</b>	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
<b>10</b>	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
<b>11</b>	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
<b>12</b>	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
<b>13</b>	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
<b>14</b>	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
<b>15</b>	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
<b>16</b>	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
<b>17</b>	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
<b>18</b>	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
<b>19</b>	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
<b>20</b>	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
<b>21</b>	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
<b>22</b>	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
<b>23</b>	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,768
<b>24</b>	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
<b>25</b>	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
<b>26</b>	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
<b>27</b>	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,689
<b>28</b>	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
<b>29</b>	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,660
<b>30</b>	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646



## **Anexo 3**

### **Anexo 3 - FONTES DE INCERTEZA POR ÁREA DE MEDIÇÃO**

## Fontes de Incerteza por Áreas de Medição

### Área: Dimensional

- Incerteza do sistema de medição ou padrão de referência (Certificado de Calibração);
- Estabilidade do Sistema de Medição/Padrão em função do tempo, (grau de utilização/agressividade do meio);
- Resolução;
- Influência das condições ambientais sobre Sistema de Medição;
- Efeitos de temperatura sobre o mensurando;
- Deformação elástica;
- Erros de cosseno;
- Erros geométricos;

### Área: Massa

- Incerteza dos padrões de massa (Certificado de Calibração);
- Estabilidade dos valores de massa em função do tempo;
- Processo de medição/comparador/balança:
  - Repetitividade das medições
  - Resolução;
  - Linearidade;
  - Excentricidade;
  - Efeitos de temperatura;
  - Erros nos comprimentos dos braços;
- Empuxo do ar;
- Condições ambientais:
  - Gradientes de temperatura;
  - Umidade;
  - Mudanças de temperatura na sala;
  - Eletricidade estática;
  - Contaminação de partículas.
- Incerteza relacionada a "g" (coeficiente de gravidade) se a balança for eletromagnética (célula de carga).

### **Área: Temperatura**

- Incerteza do padrão (Certificado de Calibração);
- Estabilidade em função do tempo;
- Equipamentos (Padrões de Tensão ou Resistência) e instrumentos de medição envolvidos;
- Auto-aquecimento (Termoresistores)
- Fios de compensação e juntas de referência;
- Estabilidade térmica do mensurando;
- Imersão parcial/efeitos de colunas emergentes;
- Interpretação matemática (tabelas de referência e ajustes de curvas);

### **Área: Eletricidade**

- Incerteza do Sistema de Medição e/ou Padrão (Certificado de Calibração);
- Estabilidade do Sistema de Medição em função do tempo;
- Estabilidade do Sistema de Medição em função das condições de uso;
- Resolução;
- Interpolação de dados de calibração;
- Interligação dos vários módulos do Sistema de Medição;
- Tensões termoelétricas;
- Efeitos de impedância;
- Repetitividade devido á conexão de condutores elétricos.

### **Comuns a todas as áreas**

- Incerteza do Sistema de Medição ou Padrão de Referência;
- Condições Ambientais;
- Repetitividade (Tipo A);
- Erros Matemáticos:
  - Aproximação;
  - Ajustes de curvas e interpolações em tabelas;
  - Erros de arredondamento/truncamento;

# **CALIBRAÇÃO DE BLOCO-PADRÃO**

**PQ - 11 - 010 - 00**

<b>REVISÃO</b>	<b>NATUREZA DAS ALTERAÇÕES</b>
00	Publicação Nova

Análise/Aprovação:

\_\_\_\_\_  
Luís Gonzaga de Lima

## **1 - OBJETIVO:**

Verificar se as principais características dimensionais e funcionais do bloco-padrão estão conforme suas especificações.

## **2 - DEFINIÇÕES:**

### **2.1 - Salvaguarda**

É o meio utilizado para prevenir alteração acidental de ajuste de um equipamento que tenha sido calibrado.

## **3 - CAMPO DE APLICAÇÃO:**

Aplica-se a Garantia da Qualidade - Laboratório de Calibração.

## **4 - RESPONSABILIDADE:**

Inspetor da Qualidade - Laboratório.

## **5 - DOCUMENTOS ENVOLVIDOS:**

NP - 11 - 001 - CALIBRAÇÃO DE EQUIPAMENTOS INSPEÇÃO, MEDIÇÃO E ENSAIOS.

NP - 11 - 002 - LABORATÓRIO INTERNO DE CALIBRAÇÃO.

IO - 11 - 003 - CÁLCULO DE INCERTEZA P/ METROLOGIA DIMENSIONAL

## **6 - REGULAMENTAÇÃO:**

### **6.1 - Calibração**

Deverá ser efetuado pelo Inspetor do Laboratório de acordo com esta Instrução Operacional, complementada pela Norma de Procedimento NP - 11 - 002 - LABORATÓRIO INTERNO DE CALIBRAÇÃO.

### **6.2 - Salvaguarda**

Para este tipo de equipamento não é necessário o uso de salvaguarda.

## **7 - PROCEDIMENTOS**

### **7.1 - Do Inspetor do Laboratório**

#### **7.1.1 - Verificações**

##### **Aspecto Geral**

- Verificar visualmente se o bloco-padrão está isento de rebarbas, batidas, riscos ou outros que possam afetar a sua utilização.

### **7.1.2 - Medições**

#### **Exatidão da Medição**

- Limpar as faces de medição do bloco-padrão usando um pano limpo e macio;
- Verificar a temperatura da sala de medição e anotar o resultado na ficha de calibração;
- Fazer a medição da temperatura do bloco-padrão de referência e do bloco-padrão a ser calibrado com o termômetro sem contato e anotar os resultados na ficha de calibração;
- Colocar o bloco padrão de referência e o bloco-padrão a ser calibrado nos dispositivos específicos para os mesmos no aparelho para calibrar bloco-padrão.
- Zerar o bloco-padrão de referência e medir a altura do bloco-padrão a calibrar repetindo 03 vezes o procedimento de zerar e medir;
- Anotar os valores encontrados na ficha de calibração.
- Fazer a medição da temperatura do bloco padrão de referência e do bloco padrão calibrado após terminar a medição e anotar os resultados na ficha de calibração;
- Verificar a temperatura da sala de medição e anotar o resultado na ficha de calibração;

#### **Paralelismo das Superfícies de Medição**

- Verificar o paralelismo das faces de medição
- Anotar os valores encontrados na ficha de calibração;

#### **Planeza das Superfícies de Medição**

- Verificar a planeza das faces de medição
- Anotar os valores encontrados na ficha de calibração;

### **7.1.3 - Critérios de Aceitação**

#### **Altura do Bloco-padrão**

- Observar se a altura média do bloco-padrão não excedeu a especificação da tabela 1, conforme a altura nominal do bloco-padrão;

### Paralelismo e Planeza das Superfícies de Medição

- Observar se a média do valor encontrado não excedeu a especificação da tabela 1, conforme a altura nominal do bloco-padrão.

Tabela 1 - Especificações para calibração (Tolerâncias em  $\mu\text{m}$ )

COMPRIMENTO NOMINAL (mm)		CLASSE 0		CLASSE 1		CLASSE 2	
Acima	Até	Erro no comprimento em qualquer ponto	Erro de Paralelismo	Erro no comprimento em qualquer ponto	Erro de Paralelismo	Erro no comprimento em qualquer ponto	Erro de Paralelismo
-	10	$\pm 0,12$	0,10	$\pm 0,20$	0,16	$\pm 0,45$	0,30
10	25	$\pm 0,14$	0,10	$\pm 0,30$	0,16	$\pm 0,60$	0,30
25	50	$\pm 0,20$	0,10	$\pm 0,40$	0,18	$\pm 0,80$	0,30
50	75	$\pm 0,25$	0,12	$\pm 0,50$	0,18	$\pm 1,00$	0,35
75	100	$\pm 0,30$	0,12	$\pm 0,60$	0,20	$\pm 1,20$	0,35
100	150	$\pm 0,40$	0,14	$\pm 0,80$	0,20	$\pm 1,60$	0,40
150	200	$\pm 0,50$	0,16	$\pm 1,00$	0,25	$\pm 2,00$	0,40
200	250	$\pm 0,60$	0,16	$\pm 1,20$	0,25	$\pm 2,40$	0,45
250	300	$\pm 0,70$	0,18	$\pm 1,40$	0,25	$\pm 2,80$	0,50
300	400	$\pm 0,90$	0,20	$\pm 1,80$	0,30	$\pm 3,60$	0,50
400	500	$\pm 1,10$	0,25	$\pm 2,20$	0,35	$\pm 4,40$	0,60
500	600	$\pm 1,30$	0,25	$\pm 2,60$	0,40	$\pm 5,00$	0,70
600	700	$\pm 1,50$	0,30	$\pm 3,00$	0,45	$\pm 6,00$	0,70
700	800	$\pm 1,70$	0,30	$\pm 3,40$	0,50	$\pm 6,50$	0,80
800	900	$\pm 1,90$	0,35	$\pm 3,80$	0,50	$\pm 7,50$	0,90
900	1000	$\pm 2,00$	0,40	$\pm 4,20$	0,60	$\pm 8,00$	1,00

### 7.1.4 - Disposição

- Aprovar o bloco-padrão se todas as verificações e medições estiverem conforme as especificações;
- Rejeitar o bloco-padrão se alguma das verificações e medições não estiver conforme as especificações.
- Introduzir os valores encontrados no sistema computadorizado "LGCAL".

### 7.1.5 - Cálculo de Incerteza

- Calcular a incerteza do micrômetro caso o mesmo tenha sido aprovado na calibração, conforme a Instrução Operacional **IO - 11 - 003 - CALCULO DE INCERTEZA P/ METROLOGIA DIMENSIONAL**

## 8 - ANEXOS

Não se aplica

# CALIBRAÇÃO DE MICRÔMETRO EXTERNO MILESIMAL

## IO - 11.011 - 00

REVISÃO	NATUREZA DAS ALTERAÇÕES
00	Publicação Nova

Análise/Aprovação:

\_\_\_\_\_  
Luís Gonzaga de Lima



## **1 - OBJETIVO:**

Verificar se as principais características dimensionais e funcionais do micrômetro estão conforme suas especificações.

## **2 - DEFINIÇÕES:**

### **2.1 - Salvaguarda**

É o meio utilizado para prevenir alteração acidental de ajuste de um equipamento que tenha sido calibrado.

## **3 - CAMPO DE APLICAÇÃO:**

Aplica-se a Garantia da Qualidade - Laboratório de Calibração.

## **4 - RESPONSABILIDADE:**

Inspetor da Qualidade - Laboratório.

## **5 - DOCUMENTOS ENVOLVIDOS:**

NP - 11 - 001 - CALIBRAÇÃO DE EQUIPAMENTOS INSPEÇÃO, MEDIÇÃO E ENSAIOS.

NP - 11 - 002 - LABORATÓRIO INTERNO DE CALIBRAÇÃO.

IO - 11 - 003 - CÁLCULO DE INCERTEZA P/ METROLOGIA DIMENSIONAL

## **6 - REGULAMENTAÇÃO:**

### **6.1 - Calibração**

Deverá ser efetuado pelo Inspetor do Laboratório de acordo com esta Instrução Operacional, complementada pela Norma de Procedimento NP - 11 - 002 - LABORATÓRIO INTERNO DE CALIBRAÇÃO.

### **6.2 - Salvaguarda**

A salvaguarda para este tipo de equipamento deverá ser feita através de lacre de integridade.

O equipamento deverá ser lacrado com a tinta vermelha MA00120 colocando-a nas junções entre a luva e o corpo e entre o tambor e a catraca do micrômetro.

## **7 - PROCEDIMENTOS**

### **7.1 - Do Inspetor do Laboratório**

### **7.1.1 - Verificações**

#### **Aspecto Geral**

- Verificar visualmente se o micrômetro está isento de rebarbas, batidas, riscos, traços ilegíveis ou outros que possam afetar a sua utilização.

#### **Funcionamento da Catraca**

- Verificar se a catraca ou a fricção funciona e não enrosca no momento do desaperto.

#### **Funcionamento da Trava**

- Verificar se o tambor apresenta um deslizamento suave ao ser acionado durante todo o seu curso.

### **7.1.2 - Medições**

#### **Exatidão da Medição e Ajuste do Zero**

- Limpar as faces de medição do micrômetro usando um pano limpo e macio;
- Verificar a temperatura da sala de medição e anotar o resultado na ficha de calibração;
- Fazer a medição da temperatura do bloco-padrão e do micrômetro com o termômetro sem contato e anotar os resultados na ficha de calibração;
- Verificar a exatidão da medição e os erros de ajuste do zero usando uma seqüência de blocos-padrão, que permitam a verificação de qualquer variação periódica, ao longo do curso do tambor do micrômetro. As posições para verificação são: 2,5 - 5,1 - 7,7 - 10,3 - 12,9 - 15,0 - 17,6 - 20,2 - 22,8 e 25,0 mm do curso do tambor;
- Colocar cada bloco seqüencialmente entre as superfícies de medição, apertando-o sob a pressão de 3 acionamentos da catraca, fazer 03 leituras e anotar os resultados na ficha de calibração;
- Fazer a medição da temperatura do bloco padrão e do micrômetro após terminar a verificação da exatidão e anotar os resultados na ficha de calibração;

#### **Paralelismo das Faces de Medição**

- Verificar o paralelismo das faces de medição do micrômetro, colocando e apertando com 03 acionamentos da catraca, um paralelo ótico padrão entre as faces de medição, fazendo 03 leituras.
- Anotar os valores encontrados na ficha de calibração;

#### **Planeza das Faces de Medição**

- Verificar a planeza das faces de medição do micrômetro utilizando um plano ótico padrão nas faces de medição, fazendo 03 leituras em cada face de medição
- Anotar os valores encontrados na ficha de calibração;
- Verificar a temperatura da sala de medição e anotar o resultado na ficha de calibração;

### 7.1.3 - Critérios de Aceitação

#### Exatidão da Medição e Ajuste do Zero

- Observar se o somatório da média dos valores encontrados não excedeu a especificação  $F_{máx.}$  da tabela 1, conforme a capacidade de medição do instrumento;
- Observar se os erros de ajuste do zero não excederam as especificações  $F_0$  da tabela 1, conforme a capacidade de medição do instrumento;

#### Paralelismo e Planeza das Superfícies de Medição

- Observar se a média do valor encontrado não excedeu a especificação da tabela 1, conforme a capacidade de medição do micrômetro.

Tabela 1 - Especificações para calibração

Capacidade de Medição	$F_{máx.}$	$F_0$	Paralelismo das Faces de Medição	Planeza das Faces de Medição
mm	$\mu m$	$\mu m$	$\mu m$	$\mu m$
$> 0 \text{ a } \leq 50$	2	$\pm 1$	1	1
$> 50 \text{ a } \leq 100$	3	$\pm 2$	2	2
$> 100 \text{ a } \leq 150$	3	$\pm 2$	2	2
$> 150 \text{ a } \leq 250$	4	$\pm 3$	3	3
$> 250 \text{ a } \leq 350$	5	$\pm 4$	4	4
$> 350 \text{ a } \leq 450$	6	$\pm 5$	5	5
$> 450 \text{ a } \leq 500$	7	$\pm 6$	6	6

### 7.1.4 - Disposição

- Aprovar o equipamento se todas as verificações e medições estiverem conforme as especificações;
- Rejeitar o micrômetro se alguma das verificações e medições não estiver conforme as especificações.
- Introduzir os valores encontrados no sistema computadorizado "LGICAL".

### 7.1.5 - Cálculo de Incerteza

- Calcular a incerteza do micrômetro caso o mesmo tenha sido aprovado na calibração, conforme a Instrução Operacional **IO - 11 - 003 - CALCULO DE INCERTEZA P/ METROLOGIA DIMENSIONAL**

## **8 - ANEXOS**

Não se aplica

# CÁLCULO DE INCERTEZA P/ METROLOGIA DIMENSIONAL

## IO - 11.003 - 00

REVISÃO	NATUREZA DAS ALTERAÇÕES
00	Publicação Nova

Análise/Aprovação:

\_\_\_\_\_  
Luís Gonzaga de Lima

**CÁLCULO DE INCERTEZA P/ METROLOGIA DIMENSIONAL****1 - OBJETIVO:**

Estabelecer os procedimentos gerais para a realização do cálculo de incerteza em calibrações dimensionais.

**2 - DEFINIÇÕES:****INCERTEZA DE MEDIÇÃO**

Parâmetro, associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser fundamentadamente atribuídos a um mensurando.

**ERRO (DE MEDIÇÃO)**

Resultado de uma medição menos o valor verdadeiro do mensurando

**REPETITIVIDADE (DE RESULTADOS DE UMA MEDIÇÃO)**

Grau de concordância entre os resultados de medições sucessivas de um mesmo mensurando efetuadas sob as mesmas condições de medição.

**MEDIÇÃO**

Conjunto de operações com o objetivo de determinar o valor de uma grandeza.

**RESULTADO DE UMA MEDIÇÃO**

Valor atribuído a um mensurando, obtido através de uma medição.

**EXATIDÃO DE MEDIÇÃO**

Grau de concordância entre o resultado de uma medição e um valor verdadeiro do mensurando.

**4 - RESPONSABILIDADE:**

Inspetor da Qualidade - Laboratório.

**5 - DOCUMENTOS ENVOLVIDOS:**

NP - 11 - 001 - CALIBRAÇÃO DE EQUIPAMENTOS INSPEÇÃO, MEDIÇÃO E ENSAIOS.

NP - 11 - 002 - LABORATÓRIO INTERNO DE CALIBRAÇÃO.

## 6 - REGULAMENTAÇÃO:

### CÁLCULO DA INCERTEZA

Deverá ser efetuada pelo Inspetor do Laboratório de acordo com esta Instrução Operacional, complementada pela Instrução Interna de calibração específica do equipamento de medição a ser calibrado.

## 7 - PROCEDIMENTOS

### 7.1 - DO INSPETOR DO LABORATÓRIO

#### 7.1.1 - Coleta de dados

- Coletar os dados da calibração realizada sendo no mínimo três medições em cada ponto especificado nas instruções internas de Calibração do instrumento
- Preencher os dados do mensurando e dos padrões no formulário FO12345.
- Listar as fontes de incerteza a serem consideradas no cálculo da incerteza.
- Preencher o quadro de distribuição de incertezas.
- Calcular a Incerteza da medição conforme os passos a seguir:

#### 7.1.2 - Passos para a avaliação da incerteza

1 - Determinar a relação matemática existente entre as grandezas de entrada e de saída, utilizando a expressão (1) mostrada abaixo.

$$y = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_M) \quad (1)$$

2 - Listar as fontes de incertezas envolvidas na calibração baseado nas informações do sistema de medição e observando os seguintes condicionantes.

- O coeficiente de expansão térmica não deverá ser levado em consideração se a diferença entre o valor do coeficiente do padrão em relação ao do instrumento a ser calibrado for menor ou igual a  $5,0 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

**CÁLCULO DE INCERTEZA P/ METROLOGIA DIMENSIONAL**

- Se a temperatura do ambiente de medição tiver uma diferença em relação a temperatura de referência (20°C) menor ou igual a **2°C** ( $\pm 1^\circ\text{C}$ ), ela não deverá também ser levada em consideração.
- Os dois condicionantes devem ser aplicados em medições envolvendo comprimentos de até 1000mm.

**3** - Listar as incertezas padrão  $u(x_i)$  de cada fonte de incerteza, observando que a estimativa de entrada, obtida através de análise estatística, deva ser avaliada como tipo A. Já a estimativa de entrada obtida por outros meios, deve ser avaliada como tipo B da incerteza padrão.

**4** - Utilizar a expressão da média e desvio padrão amostral para a determinação da incerteza padrão  $u(x_k)$  para as avaliações tipo A, utilizando as seguintes expressões:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (2)$$

$$s(x_k) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (3)$$

$$u(x) = s(\bar{x}) = \frac{s(x_k)}{\sqrt{n}} \quad (4)$$

**5** - Utilizar as expressões abaixo para as avaliações tipo B, de acordo com o tipo de distribuição suposta para a variável de entrada analisada.

- Quando a distribuição puder ser suposta Normal tendo sido informado o limite de variação  $U$  e o fator de abrangência  $k$  da variável, calcula-se a respectiva incerteza conforme indica (5)



$$u(x) = \frac{U}{k} \quad (5)$$

- Quando a distribuição puder ser suposta t-student tendo sido informado o limite de variação  $U$  e o número de medições repetidas, calcula-se a respectiva incerteza conforme indica a expressão (6)

$$u(x) = \frac{U}{n-1} \quad (6)$$

- Quando a distribuição for qualquer outra, exceto Normal e t-student, sugere-se o uso do modelo retangular ou uniforme, resultando na incerteza padrão  $u(x_k)$  dada por (7).

$$u(x_k) = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad (7)$$

**6** - Calcular a incerteza padrão combinada a partir dos resultados das incertezas  $u(x_k)$  pela expressão (8)

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{k=1}^M c_k^2 u^2(x_k)} = \sqrt{c_1^2 u^2(x_1) + c_2^2 u^2(x_2) + \dots + c_N^2 u^2(x_M)} \quad (8)$$

**7** - Determinar a incerteza expandida  $U$  multiplicando a incerteza padrão combinada  $u_c(y)$  por um fator de abrangência constante  $k = 2$ , conforme a expressão (9)

$$U = k u_c(y) \quad (9)$$

**8** - Expressar o resultado final da medição conforme ilustrado na expressão (10) a seguir.

$$Rm = Vm \pm U \text{ (unidade)} \quad (10)$$

**CÁLCULO DE INCERTEZA P/ METROLOGIA DIMENSIONAL**

Para completar a especificação, acrescentar a seguinte declaração:

"A incerteza informada é baseada em uma incerteza padrão e num fator de abrangência de  $k = 2$ , gerando um nível de confiança de aproximadamente 95%".  
registre a incerteza expandida no valor do mensurando.

Registrar o valor da incerteza expandida no sistema "LGCAL".

**8 - ANEXOS**

Não se aplica